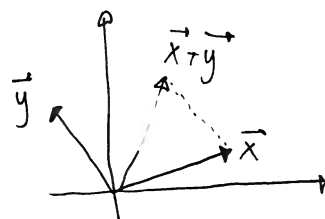


# Overblikk over MAT1125

Kap 1: I  $\mathbb{R}^n$  kan vi legge sammen vektorer og gange med skalarer.

Vi skal abstrahere dette:

$\mathbb{R}^n \mapsto$  generelt vektorrom  $U$   
vektorer  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mapsto$  vektorer  $u \in U$   
skalarer  $\alpha \in \mathbb{R} \mapsto$  skalarer  $\alpha \in \mathbb{K}$ , der  
 $\mathbb{K}$  er en generell kropp



Vi skal definere basiser og dimensjon.

Kap 2: Vi generaliserer matriser til lineære avbildninger.

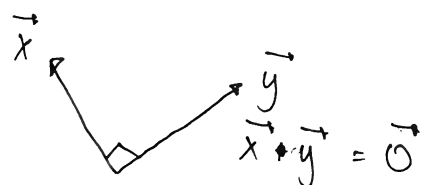
Mens vektorene  $u \in U$  er objektene våre, er lin. avb.

hva du kan gjøre med objektene - de er funksjoner.

Vi skal se hva grunnleggende konsepter som definisjons- og verdimråde, injektivitet, surjektivitet, osv. betyr for lin. avb.

Kap 3: Vi introduserer normer på vektorrom, slik at vi kan definere konvergens av følger av vektorer og kontinuitet av funksjoner på vektorrom.

Kap 4: Vi introduserer indreprodukter på vektorrom - generalisering av prikkproduktet. Dermed kan vi gjøre "geometri" på vektorrom - vi kan bestemme om vektorer er vinkelrette på hverandre (ortogonale).



Kap. 5: Vi ser på egenverdier og egenvektorer av lin. avb. :  
skalarer  $\lambda$  og vektorer  $u$  slik at  $T(u) = \lambda u$ .

Vi skal se hvilke lin. avb. som har "mange" egenvektorer,  
og hvilke konsekvenser det har. Spektralteoremet,  
singulærverdidekomposisjon.

Kap. 6: Vi studerer fourierrekker: Rekker på formen  
$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt).$$

Vi skal se at "mange" funksjoner kan skrives som  
en fourierrekke.

# Kap. 1: Vektorrom

## 1.1: Vektorrom og underrom

(bestående av "skalarer")

Def: En krøpp består av en mengde  $K$  og to operasjoner  
 $+ : K \times K \rightarrow K$  ("addisjon") og  $\cdot : K \times K \rightarrow K$  ("mult.")  
slik at for alle  $\alpha, \beta, \gamma \in K$  er:

(i)  $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$  og  $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$  (assosiativitet)

(ii)  $\alpha + \beta = \beta + \alpha$  og  $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$  (kommutativitet)

(iii)  $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$  (distributivitet)

(iv) Det eksisterer to elementer  $0 \in K$  og  $1 \in K$   
(den additive identiteten og den multiplicative identiteten)

slik at  $\alpha + 0 = \alpha$  og  $\alpha \cdot 1 = \alpha$

(v) ~~Der eksisterer~~ Det eksisterer et element  $-\alpha \in K$  slik at  
 $\alpha + (-\alpha) = 0$  (additiv invers)

(vi) Om  $\alpha \neq 0$  eksisterer et element  $\alpha^{-1} \in K$  slik at  
 $\alpha \cdot (\alpha^{-1}) = 1$

Vi skriver  $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$ ,  $\frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot (\beta^{-1})$ ,  $\alpha\beta = \alpha \cdot \beta$

Eksempler:  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{Z}/(p\mathbb{Z})$  for primtall  $p$ .

Merk: Hver gang vi snakker om en krøpp  $K$ , kan du fint  
tenke deg at  $K = \mathbb{R}$  eller  $K = \mathbb{C}$ . I kap. 3-6 skal  
vi kun jobbe med disse krøppene.

Merk: Aksiomene (i)-(vi) gjør oss i stand til å

gjøre algebra: Om  $\frac{\alpha + \beta}{\gamma} = \delta$ , er

$$\begin{aligned}\delta\gamma &= ((\alpha + \beta)\gamma^{-1})\gamma = (\alpha + \beta)(\gamma^{-1}\gamma) = (\alpha + \beta)(\gamma\gamma^{-1}) = (\alpha + \beta) \cdot 1 \\ &= \alpha + \beta\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha = \alpha + 0 = \alpha + (\beta + (-\beta)) = (\alpha + \beta) + (-\beta) = \underline{\underline{\delta\gamma + (-\beta)}}$$

Def:

La  $K$  være en kropp. Et vektorrom over  $K$  er en mengde  $U$  (bestående av "vektorer") utstyrt med to operasjoner  $+$  :  $U \times U \rightarrow U$  og ("vektoraddisjon") og  $\cdot$  :  $K \times U \rightarrow U$  ("skalarmultiplikasjon") slik at :

(i)  $(u+v)+w = u+(v+w)$

(assosiativitet)

(ii)  $u+v = v+u$

(kommutativitet)

(iii)  $\alpha \cdot (u+v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$

(distributivitet mhp. vek.add.)

(iv)  $(\alpha+\beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$

(distr. mhp. skalaraddisj.)

(v)  $(\alpha \cdot \beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$

(kompatibilitet mellom skalar- og vektormult.)

(vi)  $1 \cdot u = u$

(vii) Det eksisterer en vektor  $0_U \in U$

(nullelementet / nullvek.)

slik at  $u + 0_U = u$

(viii) Det eksisterer en vektor  $-u \in U$

(additiv invers)

slik at  $u + (-u) = 0_U$

Vi skriver  $\alpha \cdot u = \alpha u$  og  $u + (-v) = u - v$ .

Proposisjon: La  $U$  være et vektorrom.

(i) Nullelementet  $0_U$  er unikt

(ii) Den additive inversen  $-u$  er unik for enhver  $u \in U$ .

(iii) Om  $u+v=w$ , er  $u=w-v$

(iv)  $\alpha \cdot 0_U = 0_U$  for alle  $\alpha \in K$

(v)  $0 \cdot u = 0_U$  for alle  $u \in U$

(vi)  $(-1) \cdot u = -u$  ————

Hovedpoeng: Du kan gjøre algebra i et vektorrom (dog  $KK \nsubseteq$  mult.)

## Eksempler

- La  $n \in \mathbb{N}$  og  $\mathbb{R}^n := \{\text{alle } n\text{-tupler over } \mathbb{R}\}$ . Da er  $\mathbb{R}^n$  et vektorrom over  $\mathbb{R}$  under operasjonene

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

og

$$\alpha (x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n).$$

- $\mathbb{C}^n$ , og mer generelt,  $K^n$  for en kropp  $K$ , er vektorrom.

- $M_{m \times n}(\mathbb{R}) := \{\text{alle } m \times n\text{-matriser med komponenter i } \mathbb{R}\}$

## Interlude: matriser

En  $m \times n$ -matrise er en tabell med  $m$  rader og  $n$  kolonner. Om  $A$  betegner

matrisen, er  $(A)_{jk}$  elementet i rad  $j$

og kolonne  $k$ . For tall  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ , er

$$(a_{jk})_{\substack{j=1, \dots, m \\ k=1, \dots, n}}$$

$m \times n$ -matrisen med  $(j, k)$ -komponent  $a_{jk}$ .

Vi adderer  $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  slik:

$$A + B = \left( (A)_{jk} + (B)_{jk} \right)_{\substack{j=1, \dots, m \\ k=1, \dots, n}}$$

og multipliserer med skalarer  $\alpha \in \mathbb{R}$  slik:

$$\alpha A = \left( \alpha (A)_{jk} \right)_{\substack{j=1, \dots, m \\ k=1, \dots, n}}.$$

Alt dette kan enkelt genereres til en vilkårlig kropp  $K$ !

Nullmatrisen er  $O_{m \times n} = (0)_{\substack{j=1, \dots, m \\ k=1, \dots, n}}$

Kronecker  $\delta$  er gitt ved  $\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{om } j=k \\ 0 & \text{om } j \neq k \end{cases}$  for  $j, k \in \mathbb{Z}$

Identitetsmatrisen av dimensjon  $n$  er  $I_n \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$  gitt ved

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{jk})_{\substack{j=1, \dots, n \\ k=1, \dots, n}}$$

Standardbasen eller den kanoniske basen i  $\mathbb{R}^n$  er

$$e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n, \text{ der } e_j = (\delta_{jk})_{k=1, \dots, n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{plass } j$$

□

- La  $I \subseteq \mathbb{R}$  være en mengde. Definer

$$C^0(I, \mathbb{R}) := \{ \text{alle kontinuerlige } f: I \rightarrow \mathbb{R} \}.$$

Vektoraddisjon er definert ved

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t)$$

og skalarmultiplikasjon ved

$$(\alpha f)(t) = \alpha \cdot f(t).$$

Her kan  $\mathbb{R}$  byttes ut med  $\mathbb{C}$ :  $C^0(I, \mathbb{C})$ .

- Et reelt polynom (eller bare polynom) er en funksjon på formen  $p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$  for  $n \in \mathbb{N}_0$  og  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  (for  $t \in \mathbb{R}$ ). Mengden

$$\mathcal{P} := \{ \text{alle reelle polynomer} \}$$

er et vektorrom over  $\mathbb{R}$ .

Likledes er  $\mathcal{P}(\mathbb{C}) := \{ \text{alle komplekse polynomer} \}$

et vektorrom over  $\mathbb{C}$ .

• Det trivielle vektorrommet er  $\{0\}$ .

• La  $p \in [1, \infty)$ ,  $K$  en kropp, enten  $K = \mathbb{R}$  eller  $K = \mathbb{C}$ .

Vi lar 
$$l^p(K) := \left\{ \text{alle følger } (a_1, a_2, \dots) \text{ i } K \text{ med } \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p < \infty \right\}.$$

Eks: Om  $a := \left(\frac{1}{k}\right)_{k \in \mathbb{N}} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$ , er  $a \notin l^1(\mathbb{R})$ ,  
men  $a \in l^p(\mathbb{R}) \quad \forall p > 1$ .

Vi definerer vektoraddisjon med

$$(a_k)_{k \in \mathbb{N}} + (b_k)_{k \in \mathbb{N}} = (a_k + b_k)_{k \in \mathbb{N}}$$

og skalarmult.

$$\alpha (a_k)_{k \in \mathbb{N}} = (\alpha a_k)_{k \in \mathbb{N}}.$$

Vi må ikke at disse er veldefinert, altså at  $a+b \in l^p(K)$  og  $\alpha a \in l^p(K)$   
 $\forall a, b \in l^p$  og  $\alpha \in K$ . Det rirke er lett:

$$\alpha a = (\alpha a_k)_{k \in \mathbb{N}} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha a_k|^p = |\alpha|^p \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p}_{< \infty} < \infty.$$

Det første er vanskeligere. Tilfellet  $p=1$  er en oppgave.

Vi gjør tilfellet  $p=2$ , Om  $a, b \in l^p$ , er

$$a+b = (a_k + b_k)_{k \in \mathbb{N}}. \quad \xrightarrow{K=\mathbb{R}}$$

$$\text{Vi har } |a_k + b_k|^2 = (a_k + b_k)^2 = a_k^2 + 2a_k b_k + b_k^2.$$

Vi bruker Youngs ulikhet:  $2\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2$ , og får

$$|a_k + b_k|^2 \leq 2a_k^2 + 2b_k^2. \quad \text{Dermed er}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k + b_k|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} (2a_k^2 + 2b_k^2) = 2 \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2}_{< \infty} + 2 \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2}_{< \infty} < \infty.$$

Altså er  $a+b \in l^2(\mathbb{R})$  når  $a, b \in l^2(\mathbb{R})$ .

- För  $K = \mathbb{R}$  eller  $K = \mathbb{C}$  är  
 $l^p(K) := \{ \text{alle følger } (a_1, a_2, \dots) \text{ i } K \text{ med } \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k| < \infty \}$ .

Def:  
 La  $U$  være et vektorrom over  $K$ . En delmengde  $V \subseteq U$  er et underrom dersom:

- (i)  $u+v \in V \quad \forall u, v \in V$
- (ii)  $\alpha u \in V \quad \forall \alpha \in K, u \in V$ .

Eksempel:

La  $V := \{x \in \mathbb{R}^3 : (x)_1 = 0\}$ . Da er  $V$  et underrom av  $\mathbb{R}^3$ , for om  $u, v \in V$ , er

$$(u+v)_1 = (u)_1 + (v)_1 = 0$$

$$\text{og } (\alpha u)_1 = \alpha (u)_1 = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Eksempel:  $l^1(\mathbb{R})$  er et underrom av  $l^\infty(\mathbb{R})$ . Om

$a \in l^1(\mathbb{R})$ , er  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$ , så  $\sup_k |a_k| < \infty$ , så  $a \in l^\infty(\mathbb{R})$ .  
 "( $a_k$ ) $_{k \in \mathbb{N}}$ "

Siden  $l^1(\mathbb{R})$  selv er et vektorrom, er  $a+b, \alpha a \in l^1(\mathbb{R})$  når  $a, b \in l^1, \alpha \in \mathbb{R}$ .

## 1.2: Lister av vektorer

Def: En liste av vektorer er en  $n$ -tupel  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), der  $u_1, \dots, u_n$  ligger i et vektorrom  $U$ .

## 1.3: Lineær uavhengighet

Def: La  $U$  være et vektorrom over  $K$ , ~~En liste~~  
 ~~$B = (u_1, \dots, u_n)$  av vektorer i  $U$  er lineært uavhengig~~  
og la  $B = (u_1, \dots, u_n)$  være en liste av vektorer  
i  $U$ . En lineærkombinasjon av  $B$  er et uttrykk  
på formen  
$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n \quad \text{for } \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K.$$

Spennet til  $B$  er mengden av alle lin.komb. av  $B$ ,  
$$\text{span}(B) = \{ \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n : \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K \}.$$

Vi sier at  $B$  utspenner  $U$  dersom  $\text{span}(B) = U$ .

Oppg:  $\text{span}(B)$  er et underrom av  $U$ .

Eksempel: •  $p_0, p_2 \in \mathcal{P}_2$ ,  $p_k(t) := t^k$ ,  $\text{span}(p_0, p_2)$   
•  $\text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ .

Def:

La  $U$  være et vektorrom over  $K$  og la  $B = (u_1, \dots, u_n)$   
være en liste av vektorer. Da er  $B$  lineært uavhengig  
dersom

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1, \dots, \alpha_n = 0.$$

Hvis ikke er den lineært afhængig. ~~Luden~~

Merk at  $B$  er lineært afhængig hvis og bare hvis det eksisterer  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$  som ikke alle er 0, men ligevel

→ Merk: at om  $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = 0$ .  
om  $(u_1, \dots, u_n)$  er lin. uafh., og  $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = \beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n$ , er  $\beta_1 = \alpha_1, \dots, \beta_n = \alpha_n$ .

Eksempel:  $\mathbb{R}^2$  er et vektorrum over  $\mathbb{R}$ . Listen  $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$  er lin. afh., fordi  $1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ .

Derimod er  $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$  lin. uafh., for om

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{er } \alpha_1 = 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \quad \text{og } 0 = 0,$$

$$\text{nå } \alpha_1 = 0, \quad \text{nå } \alpha_2 = 0.$$

□

Oppg: Om  $(u_1, \dots, u_n)$  er lin. uafh., er  $u_1, \dots, u_n \neq 0$ .

Lemma:

La  $(u_1, \dots, u_n)$  være en liste av vektorer ulik 0. TFAE:

(i)  $(u_1, \dots, u_n)$  er lin. uafh.

(ii)  $u_k \notin \text{span}(u_1, \dots, u_{k-1})$  for  $k=2, \dots, n$ .

Bewis:

(i)  $\Rightarrow$  (ii): Motrigelsesbevis.

(ii)  $\Rightarrow$  (i):  $\longrightarrow \uparrow \longrightarrow$ .

■

Oppg:  $(u_1, \dots, u_n)$  er lin. afh.  $\Leftrightarrow$  én av vektorene  $u_1, \dots, u_n$  er en lineærkomb. av de andre.

Oppg:

Proposition:

La  $B = (u_1, \dots, u_n)$  være en liste af vektorer i  $U$ , og antag at én af vektorene er en lin. komb. af de andre:

$$u_k \in \text{span}(B'), \quad B' := (u_1, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_n).$$

Da er  $\text{span}(B') = \text{span}(B)$ .

Korollar: For enhver liste  $B$  findes en mindre liste  $C \subseteq B$  slik at  $\text{span}(C) = \text{span}(B)$ , men  $C$  er lin. uafh.