

1.4: Basis og dimension

Def:

La U være et vektorrom. En basis for U er en liste $(u_1, \dots, u_n)$ som er lineært uavhengig og som spenner U .

Oppg: Standardbasisen $(e_1, \dots, e_n)$ er en basis for K^n .

Eks: Om $u_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, er (u_1, u_2) en basis for $\mathbb{R}^2$.

Def: Et vektorrom er endeligdim. om det spennes av endelig mange vektorer; ellers er det uendeligdim.
Det trivielle vektorromet $\{0\}$ defineres som endeligdim.

Teorem:

La U ha basis $B := (u_1, \dots, u_n)$. For enhver $u \in U$ finnes da en unik n -tupel $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ slik at

$$u = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n.$$

Vi skriver $[u]_B := (x_1, \dots, x_n)$, basisrepresent. av u i B .

Beris: (oppgave).

Lemma 1.4.7

La U være et vektorrom og $(u_1, \dots, u_n)$ og $(v_1, \dots, v_m)$ være lister av vektorer. Anta at $(u_1, \dots, u_n)$ utspenner U , og at $(v_1, \dots, v_m)$ er lin. uavh. Da er $m \leq n$.

Beris: Anta motstrøtt at $m > n$.

Siden $\text{span}(u_1, \dots, u_n) = U$, finnes $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ s.e.

$$v_1 = \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j.$$

Siden $v_1 \neq 0$, må minst én av $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ være ulik 0, la oss si α_k .

Løs for u_k :

$$u_k = \alpha_k^{-1} v_1 - \sum_{\substack{j=1, \dots, n \\ j \neq k}} \alpha_k^{-1} \alpha_j u_j.$$

Alttså er $u_k \in \text{span}(v_1, u_1, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_n)$, så

(av Prop. 1.3.9) $\text{span}(B') = \text{span}(u_1, \dots, u_n) = U$. Vi gjentar dette for $v_2, v_3, \dots$, og finner at $(v_1, \dots, v_n)$ spenner U .
(etter n ganger)

Men $v_{n+1} \in U = \text{span}(v_1, \dots, v_n)$, som motstrider at $(v_1, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_m)$ er lin. uavh. ▣

Teorem

La U være endeligdim. Da er alle basiser for U like store.

(oppg. til leseren)

Antall ~~skille~~ vektorer i en basis er dermed en invariant.

Def:

La U være et vektorrom. Om U er endeligdim.,
definerer vi dimensjonen til U , $\dim U$, til å
være antall vektorer i en basis for U .

For $U = \{0\}$ lar vi $\dim(\{0\}) := 0$.

Om U er uendeligdim. skriver vi $\dim U := \infty$.

Oppg: dimensjonen til $\mathbb{R}^n$ over $\mathbb{R}$ er n

— " — $\mathbb{C}^n$ over $\mathbb{C}$ er n

— " — over $\mathbb{R}$ er $2n$.

14.11

Prop: La U være et vektorrom med underrom V . Da er
 $\dim V \leq \dim U$. Om U er endeligdim., er $\dim U = \dim V$
hvis $U = V$.

Beris:

Om $\dim U = \infty$ er vi ferdig; likeledes om $\dim U = 0$.

La nå $n := \dim U \in \mathbb{N}$, og la $V_0 := \{0\}$. Om $V = V_0$,

er $\dim V = 0 < n$, og vi er ferdig.

Ellers finnes en $u_1 \in V \setminus V_0$. La $V_1 := \text{span}(u_1)$, slik
at $V_0 \subseteq V_1 \subseteq V$. Om $V = V_1$ er $\dim V_1 = 1 \leq n$, og vi er ferdig.

V_i itererer denne prosessen og finner $u_k \in V \setminus V_{k-1}$ og danner
 $V_k := \text{span}(u_1, \dots, u_k)$. Da er $(u_1, \dots, u_k)$ lin. uavh. (Lem. 1.3.8)

og siden $V_k \subseteq V \subseteq U$, er $k \leq n$. Prosessen må
derfor ende etter høyst n steg, og vi får en $m \leq n$ slik
at $V_m = V \subseteq U$.

Anta bl slutt at $\dim U \in \mathbb{N}$, $\dim U = \dim V$. Om $V \neq \emptyset$, eksisterer en $u_{n+1} \in U \setminus V$, samt en basis $(u_1, \dots, u_n)$ for V . Da er $(u_1, \dots, u_{n+1})$ lin. uavh., som ~~medfører at~~ _{gir} $\dim U \geq n+1 > n = \dim V = \dim U$ ∇ .

Korollar: La U være n -dim., og la $u_1, \dots, u_n \in U$. Da er $(u_1, \dots, u_n)$ en basis for U hvis og bare hvis den er lin. uavh.

1.5: Polynombariser

Vi har $\mathcal{P}_n := \{ \text{alle reelle polynomer av grad høyst } n \}$

1.5.1: Den kanoniske basisen

Prop: Definer $p_0(t) := 1$, $p_k(t) := t^k$ ($k \geq 1$). Da er $(p_0, \dots, p_n)$ en basis for $\mathcal{P}_n$.

Beris: $\text{span}(p_0, \dots, p_n) = \mathcal{P}_n$ er opplagt. $p_0, \dots, p_n \neq 0$, og $p_k \notin \text{span}(p_0, \dots, p_{k-1}) \quad \forall k$. $\square$

$\rightarrow$ Obs: $[p]_{\mathcal{B}} = (p(0), p'(0), \dots, \frac{1}{n!} p^{(n)}(0))$.

Korollar: • $\dim \mathcal{P}_n = n+1$

• $\dim \mathcal{P} = \infty$

• $\dim C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \infty$

} oppg. 1.5.2

1.5.2: Newton-basisen

La $t_0, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ være forskjellige. Da er Newton-formen på n -tegrads polynom som interpolerer f i $t_0, \dots, t_n$

$$p(t) := \alpha_0 + \alpha_1(t-t_0) + \dots + \alpha_n(t-t_0)\dots(t-t_{n-1})$$

her $\alpha_k := f[t_0, \dots, t_k]$ og

$$f[t_k] := f(t_k), \quad f[t_0, \dots, t_{k+1}] := \frac{f[t_1, \dots, t_{k+1}] - f[t_0, \dots, t_k]}{t_{k+1} - t_0}$$

(dividerte differenser)

Prop.: La $t_0, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ være forskjellige, og la $p_k(t) := \prod_{l=0, \dots, k-1} (t - t_l)$.

Da er $(p_0, \dots, p_n)$ en basis for $\mathcal{P}_n$.

Beris:

Siden $\dim \mathcal{P}_n = n+1$ og $(p_0, \dots, p_n)$ er $n+1$, vektorer, holder det å vise at listen er lin. uavh. Dette følger av at p_k er et k -tegradypol. $\forall k$. $\square$

1.5.3: Lagrange-polynomer

La igjen $t_0, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ være forskjellige, Lagrange-funksjonene er

$$L_k(t) := \prod_{\substack{j=0, \dots, n \\ j \neq k}} \frac{t - t_j}{t_k - t_j} \quad (k=0, \dots, n).$$

Merk at

- (i) L_k er veldefinert, siden $t_0, \dots, t_n$ er distinkte
- (ii) $L_0, \dots, L_n$ har grad n
- (iii) $L_k(t_l) = \delta_{kl} \quad \forall k, l$.

Lagrange-formen til det integr. polynomiet er

$$p(t) := \sum_{k=0}^n f(t_k) L_k(t) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Opp:

$(L_0, \dots, L_n)$ er en basis for $\mathcal{P}_n$.

Beris:

Vi viser at listen er lin. uavh. Anta at $\sum_{k=0}^n \alpha_k L_k = 0$.

Sett inn $t = t_\ell$ ($\ell \in \{0, \dots, n\}$) og få

$$0 = \sum_{k=0}^n \alpha_k L_k(t_\ell) = \alpha_\ell, \quad \ell = 0, \dots, n.$$

Korollar: Om $p \in \mathcal{P}_n$, $p(t_0) = \dots = p(t_n) = 0 \Rightarrow p = 0$.

15.4: Legendre-polynomer

$$p_0 \equiv 1, \quad p_1(t) = t, \quad p_k(t) := \frac{2k-1}{k} t p_{k-1}(t) - \frac{k-1}{k} p_{k-2}(t).$$

1.6: Sum og direkteprodukt

Def: La U ha underrom V og W . Summen av V og W
er $V+W := \{v+w : v \in V \text{ og } w \in W\}$.

Oppg: a) $V+W$ er et underrom av U
b) V og W er underrom av $V+W$
c) $\dim(V+W) \leq \dim V + \dim W$.

Oppg: a) $V \cup W$ er ikke nødv. et underrom, men
b) $V+W$ er det minste underromet som inneholder $V \cup W$.

Def:
La V og W være vektorrom over en kropp K . Direkteproduktet av V og W
er $V \oplus W := \{(v, w) : v \in V, w \in W\}$
Vi utstyrr $V \oplus W$ med nullvektoren $(0_V, 0_W)$ og operasjonene
 $(v, w) + (v', w') := (v+v', w+w')$, $\alpha(v, w) := (\alpha v, \alpha w)$.

Oppg: a) $V \oplus W$ er et vektorrom
b) Om V har basis $(v_1, \dots, v_n)$ og W basis $(w_1, \dots, w_m)$,
har $V \oplus W$ basis
 $((v_1, 0), \dots, (v_n, 0), (0, w_1), \dots, (0, w_m))$.

c) $\dim(V \oplus W) = \dim V + \dim W$.