

2. Lineære avbildninger

2.1 Definisjoner

Def: La U og V være vektorrom over samme kropp K . En lineær avbildning fra U til V er en funksjon $T: U \rightarrow V$ slik at

$$(i) T(u+v) = T(u) + T(v) \quad \forall u, v \in U$$

$$(ii) T(\alpha u) = \alpha T(u) \quad \forall u \in U, \alpha \in K$$

Vi skriver ofte Tu istedenfor $T(u)$.

Mengden av alle slike funksjoner kalles $\mathcal{L}(U, V)$. Spesielt skriver vi $\mathcal{L}(U) := \mathcal{L}(U, U)$ (mengden av alle operatorer eller endomorfier på U), og $\mathcal{U}' := \mathcal{L}(U, K)$ (mengden av alle funksjonaler på U).

Om $T: U \rightarrow V$ og $S: V \rightarrow W$ er lineære, skriver vi $ST := S \circ T$,
altså $(ST)(u) := S(T(u)), \quad u \in U$.

Oppg: Om T er lineær, er $T(0) = 0$.

Oppg: Om $A \in M_{m \times n}(K)$, er $T: K^n \rightarrow K^m$, $T(x) := Ax$ lineær.

Prop.: $\mathcal{L}(U, V)$ er et vektorrom over K .

Bevis: Oppgave.

Lin. avb. er unikt bestemt av hva den gjør med en basis:

Prop.: La U, V være vektorrom over K , $(u_1, \dots, u_n)$ en basis for U , og $v_1, \dots, v_n \in V$. Da finnes en unik $T \in \mathcal{L}(U, V)$ slik at $T(u_k) = v_k \quad \forall k = 1, \dots, n$.

2.2. Bilde og kjerne

Def: La $T \in \mathcal{L}(U, V)$. Vi definerer kjernen til T som

$$\ker T := \{u \in U : Tu = 0\}$$

og bildet til T som

$$\operatorname{im} T := \{Tu : u \in U\}.$$

Rangen til T er $\operatorname{rank} T := \dim(\operatorname{im} T)$

Prop:

- (i) $\ker T$ er et underrom av U
- (ii) $\operatorname{im} T$ er et underrom av V
- (iii) $\operatorname{rank} T \leq \min(\dim U, \dim V)$

Beris: (i) og (ii) er oppgaver.

(iii): Siden $\operatorname{im} T$ er et underrom av V , er $\dim \operatorname{im} T \leq \dim V$.

Vi trenger derfor bare vise at $\operatorname{rank} T \leq \dim U$.

Om $\dim U = 0$ eller ∞ er det enkelt. La derfor $(u_1, \dots, u_n)$ være en basis for U . Siden

$$U = \operatorname{span}(u_1, \dots, u_n) = \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k u_k : \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K \right\},$$

$$\begin{aligned} \text{er } \operatorname{im} T &= \{Tu : u \in U\} = \left\{ T\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k u_k\right) : \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K \right\} \\ &= \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k Tu_k : \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K \right\} \\ &= \operatorname{span}(Tu_1, \dots, Tu_n). \end{aligned}$$

Altså er $\operatorname{im} T$ utspant av n vektorer, så

$$\operatorname{rank} T = \dim(\operatorname{im} T) \leq n.$$

Teorem (dimensjonsatsen)

La $T \in \mathcal{L}(U, V)$. Da er $\dim \operatorname{im} T + \dim \ker T = \dim U$.

Bemerkning:

- Kalles rank-nullity theorem
- Brukes 8 forskjellige steder i boka.

Beris:

$\forall i$ antar først at $\dim U < \infty$. Dermed $\operatorname{im} T = \{0_V\}$,
er $\ker T = U$, så $(LHS) = 0 + \dim U = (RHS)$.

Ellers er $m := \dim(\operatorname{im} T)$ et naturlig tall. La $(v_1, \dots, v_m)$
være en basis for $\operatorname{im} T$, ~~$\dim \ker T = \{0\}$~~
Siden $v_1, \dots, v_m \in \operatorname{im} T$, finner $u_1, \dots, u_m \in U$ slik at $Tu_j = v_j \ \forall j$.

Siden $\ker T \subseteq U$ er $\dim(\ker T) \leq \dim U < \infty$, så $\ker T$ har
en basis $(w_1, \dots, w_\ell)$. ($\forall i$ tillater her $\ell=0$, dvs. $\ker T = \{0\}$.)

$\forall i$ påstår at $(u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_\ell)$ er en basis for U , som
beviser teoremet.

• Listen spenner U :

For enhver $u \in U$ er $Tu \in \operatorname{im} T$, så det finnes $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$
slik at

$$Tu = \sum_{j=1}^m \alpha_j v_j = T \left(\underbrace{\sum_{j=1}^m \alpha_j u_j}_{=: u'} \right).$$

Altså er $T(u-u') = 0$, så $u-u' \in \ker T$. Dermed finnes

$\beta_1, \dots, \beta_\ell \in \mathbb{K}$ slik at

$$u-u' = \sum_{j=1}^{\ell} \beta_j w_j.$$

dermed er

$$u = \sum_{j=1}^m \alpha_j u_j + \sum_{j=1}^l \beta_j w_j,$$

og vi har vist utragnet.

- Listen er lineært uafhængig:

Antag så at $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_l \in K$ er sådanne at

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j u_j + \sum_{j=1}^l \beta_j w_j = 0. \quad (*)$$

$$\text{Da er } 0_v = T(0_v) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \underbrace{T u_j}_{=v_j} + \sum_{j=1}^l \beta_j \underbrace{T w_j}_{=0} = \sum_{j=1}^m \alpha_j v_j.$$

Siden $(v_1, \dots, v_m)$ er lin. uafh., er $\alpha_1, \dots, \alpha_m = 0$, så (*) giver

$$\sum_{j=1}^l \beta_j w_j = 0,$$

Men $(w_1, \dots, w_l)$ er lin. uafh., så $\beta_1, \dots, \beta_l = 0$.

Vi har vist utragnet.

Tilfældet $\dim U = \infty$:

For enhver $n \in \mathbb{N}$ findes et underrom U_n af U med $\dim U_n = n$.

La $T_n := T|_{U_n}$, det vil sige $T \in \mathcal{L}(U_n, V)$ er givet ved

$T_n u := T u$ for $u \in U_n$. Da er

$$\dim(\operatorname{im} T_n) + \dim(\ker T_n) = \dim U_n = n.$$

Men $\operatorname{im} T_n \subseteq \operatorname{im} T$ og $\ker T_n \subseteq \ker T$, så

$$\dim(\operatorname{im} T) + \dim(\ker T) \geq \dim(\operatorname{im} T_n) + \dim(\ker T_n) = n$$

for enhver n . Altså må $(LHS) = \infty = \dim U$. 

Om $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ og $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $T(x) := Ax$, er

$$\begin{aligned} \text{im } T &:= \{Tx : x \in \mathbb{R}^n\} = \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \{a_1 \alpha_1 + \dots + a_n \alpha_n : \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\} \quad (\text{der } A = (a_1, a_2, \dots, a_n)) \\ &= \text{span}(a_1, \dots, a_n), \end{aligned}$$

kolonnerummet til A . Tallet $\dim(\text{im } T)$ (rangen til T/A)
er hvor mange af kolonnene i A som er lin. uafh.,
mens $\dim(\ker T)$ måler hvor mange kolonner som
er "overflødige". Dette giver

$$\dim \text{im } T + \dim \ker T = n.$$

2.3: Injektiv, surjektiv, bijektiv

Def: En funktion $f: A \rightarrow B$ er

- injektiv om (...)
- surjektiv om (...)
- bijektiv om (...). (kaldes også inverterbar).

En funktion $f: A \rightarrow B$ er bijektiv hvis $\exists f^{-1}: B \rightarrow A$
slike at $f(f^{-1}(b)) = b \quad \forall b \in B$, $f^{-1}(f(a)) = a \quad \forall a \in A$.

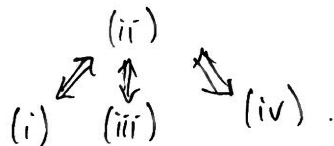
Oppg: La $T \in \mathcal{L}(U, V)$. Da er T surjektiv hvis $\text{im } T = V$.

Lemma:

La $T \in \mathcal{L}(U, V)$. Da er følgende ekvivalent:

- (i) T er injektiv
- (ii) $Tu = 0$ kun for $u = 0$
- (iii) $\ker T = \{0\}$
- (iv) Om $(u_1, \dots, u_n)$ er en lin. uavh. liste i U ,
er $(Tu_1, \dots, Tu_n)$ lin. uavh. (T bevarer lin. uavh.).

Beris: Vi beriser



(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Enkel omskriving

(i) $\Rightarrow$ (ii): ...

(ii) $\Rightarrow$ (i): Om $Tu = Tv$ ($u, v \in U$), er $T(u-v) = 0$,
så $u-v = 0$, dvs. $u = v$.

(ii) $\Rightarrow$ (iv): La $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ n.a. $\sum_{k=1}^n \alpha_k Tu_k = 0$.

Da er $T\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k u_k\right) = 0$, så av (ii) er $\sum_{k=1}^n \alpha_k u_k = 0, \dots$

(iv) $\Rightarrow$ (ii): Anta at $v \in U$ er slik at $Tv = 0$.

Om $v \neq 0$ er (v) lin. uavh., så (Tv) er også lin. uavh. (av (iv)), så $Tv \neq 0$ ∇ .

Oppg: La U og V være vektorrom over $\mathbb{K}$.

(i) Om $\exists$ surjektiv $T \in \mathcal{L}(U, V)$, er $\dim U \geq \dim V$

(ii) $\iff$ injektiv $\iff \dim U \leq \dim V$

(iii) $\iff$ bijektiv $\iff \dim U = \dim V$

Hint: bruk dimensjonssetningen

Prop: Om $T \in \mathcal{L}(U, V)$ er bijektiv, er også $T^{-1} \in \mathcal{L}(V, U)$.

Bewis:

Vi har $T^{-1}Tu = u$, $TT^{-1}v = v \quad \forall u \in U, v \in V$.

La $v_1, v_2 \in V$. Da er

$$v_1 + v_2 = TT^{-1}v_1 + TT^{-1}v_2 = T(T^{-1}v_1 + T^{-1}v_2)$$

Anvend T^{-1} på begge sider:

$$T^{-1}(v_1 + v_2) = T^{-1}v_1 + T^{-1}v_2.$$

Homogenitet vises på tilsvarende måde. ■