

2.6 Basis-skifte

Prop. 2.6.1: La U ha basiser B og C . Da er

$$[u]_C = [id]_C^B [u]_B \quad \forall u \in U.$$

Matrisen $[id]_C^B$ (basis-skiftematrisen fra B til C) er inverterbar med invers $[id]_B^C$. (Her er $id: U \rightarrow U$, $id(u) := u$.)

Prop. 2.6.3: La $B = (u_1, \dots, u_n)$ være en basis for K^n , og la C være standardbasen. Da er

$$[id]_C^B = (u_1, \dots, u_n).$$

Beris: Siden $[u]_C = u \quad \forall u \in K^n$, er

$$[id]_C^B [u]_B = [u]_C = u = \sum_{k=1}^n ([u]_B)_k u_k = (u_1, \dots, u_n) [u]_B. \quad \square$$

2.7 Determinanter

For en kvadratisk matrise $A \in M_n(K)$ er

$$\det(A) := (A)_{11}(A)_{22} - (A)_{21}(A)_{12} \quad (\text{om } n=2),$$

$$\det(A) := \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} (A)_{k1} \det(A_{k1}) \quad (\text{om } n \geq 3),$$

der A_{k1} er matrisen der vi har fjernet rad k , kolonne 1 fra A .

Def: La U ha basis B og la $T \in L(U)$. Determinanten til T
er $\det(T) := \det([T]_B^B)$.

Prop. 2.7.2: Determinanten er uafhængig af valg af basis.

Prop. 2.7.3

La U være endeligdim. og ikke-trivielt. Da er $T \in \mathcal{L}(U)$ en isomorfi hvis $\det(T) \neq 0$.

Beris:

La $\mathcal{B}$ være en basis for U , og anta at T er en isomorfi. Merk at $TT^{-1} = T^{-1}T = \text{id}$. Vi får (om $n := \dim U$)

$$I_n = [\text{id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [TT^{-1}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} [T^{-1}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}.$$

Alltså er $[T^{-1}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ en ~~venstre~~ høyreinvert for $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$. Av samme argument er den en venstreinvert; dermed er $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ inverterbar, så den har ikke-null determinant. $\blacksquare$
Motstrøtt implikasjon vises på samme måte.

2.8 Direktersummer igjen

Teorem 2.8.1

La U ha underrom V og W . Da er følgende ekvivalent:

(i) $V \cap W = \{0\}$.

(ii) Vektorrommene $V \oplus W$ og $V+W$ er isomorfe, og

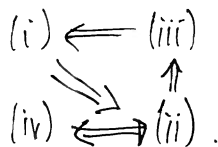
$$T: V \oplus W \rightarrow V+W, \quad T((v,w)) := v+w$$

er en slik isomorfi.

(iii) Enhver $u \in V+W$ kan skrives som $u=v+w$ for unike $v \in V, w \in W$.

(iv) (Dersom V, W er endeligdim.) $\dim(V+W) = \dim V + \dim W$.

Beris: Vi viser



Berisene for $(ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i) \Rightarrow (iv)$ overlater vi til leseren.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Om $x \in V \cap W$, er $0 = 0 + 0 = (v) + (-v)$, n  $v = -v = 0$.

(i) $\Rightarrow$ (ii): T er oppl gt line r, og om $u \in V + W$, er $u = v + w$ for $v \in V, w \in W$, n  $u = T((v, w))$; allr  er T surj.

For   vise at T er injektiv, holder det   vise at $T((v, w)) = 0$ kun n r $(v, w) = (0, 0)$. Om

$0 = T((v, w)) = v + w$, er $v = -w$, n  $v \in W$.

Men $v \in V$, n  $v \in V \cap W = \{0\}$, n  $v = 0 \Rightarrow w = 0$.

(iv) $\Rightarrow$ (ii): Siden $\dim(V + W) \leq \dim V + \dim W$ og $\dim(V \oplus W) = \dim V + \dim W$,

kan vi skrive (iv) som $\dim(V + W) = \dim(V \oplus W)$.

Allr  er T en isomorfi hvis den er surjektiv.

(Teo. 2.4.4), noe den automatisk er. $\blacksquare$

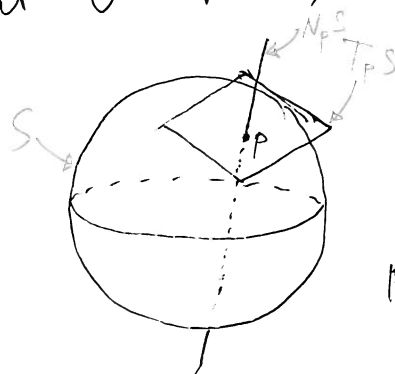
Vi kommer til   misbruke notasjonen og si at V er direkte summen av V og W ,

$$U = V \oplus W,$$

derom alle $u \in U$ kan skrives som $u = v + w$ for unike $v \in V, w \in W$

(som allr  er  kvivalent med at $U \cong V \oplus W$).

Eksempel: Mangfoldighet M ,
undermangf. $S \subseteq M$, tangentrom
 $T_p S$ og normalrom $N_p S$ av $p \in S$.



$$M = \mathbb{R}^3 \\ S = S^2$$

$$\mathbb{R}^3 = T_p S \oplus N_p S.$$