

3. Analyse i vektorrom

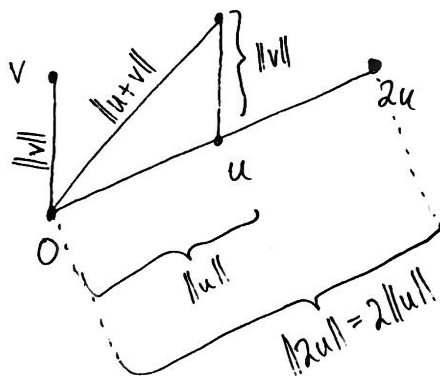
3.1 Normer

Def: La U være et vektorrom over enten $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$.

En norm på U er en funksjon $\|\cdot\| : U \rightarrow \mathbb{R}$ slik at:

- (i) $\|u\| \geq 0 \quad \forall u \in U$, og $\|u\| = 0$ hvis $u = 0$ (positivitet)
- (ii) $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\| \quad \forall u \in U, \alpha \in \mathbb{K}$ (homogenitet)
- (iii) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad \forall u, v \in U$ (trekantulikh.)

Et normert vektorrom består av et vektorrom og en norm på vektorrommet; vi skriver ofte $(U, \|\cdot\|)$. Lengden til $u \in U$ er $\|u\|$, og avstanden mellom $u, v \in U$ er $\|u-v\|$.



Eksempel: $\mathbb{R}$ er et vektorrom over $\mathbb{R}$, og absoluttverdifunksjonen

$$|x| := \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0 \\ -x & \text{om } x < 0 \end{cases}$$

er en norm på $\mathbb{R}$. (Fakta: Enhver norm på $\mathbb{R}$ er på formen $\|x\| = A|x|$ for en $A > 0$.) □

Eksempel: $\mathbb{C}$ er et vektorrom over $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$, og moduluren

$$|x| := \sqrt{(\operatorname{Re}(x))^2 + (\operatorname{Im}(x))^2}$$

er en norm på $\mathbb{C}$. □

Eksempel:

Den euklidiske normen på $\mathbb{R}^n$ (eller $\mathbb{C}^n$) er

$$\|x\|_{\ell^2} := \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} \quad \text{for } x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \mathbb{C}^n.$$

(Skrives ofte $\|\cdot\|_2$.)

Manhattanmetrikken på $\mathbb{R}^n$ (eller $\mathbb{C}^n$) er

$$\|x\|_{\ell^1} := |x_1| + \dots + |x_n| \quad \text{for } x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \mathbb{C}^n.$$

Supremumsnormen på $\mathbb{R}^n / \mathbb{C}^n$ er

$$\|x\|_{\ell^\infty} := \max_{k=1, \dots, n} |x_k|.$$

Oppg: Vis at $\|\cdot\|_{\ell^1}$ er en norm.

Fakta: Vanskeligere å vise at $\|\cdot\|_{\ell^2}$ er en norm; se Appendix C.

Vi viser at $\|\cdot\|_{\ell^\infty}$ er en norm. Det er klart at $\|x\|_{\ell^\infty} \geq 0$

$\forall x$, og om $\|x\|_{\ell^\infty} = 0$, er $\max_k |x_k| = 0$, så $|x_1|, \dots, |x_n| = 0$.

Om $\alpha \in \mathbb{K}$, er $\|\alpha x\|_{\ell^\infty} = \max_{k \neq} |\alpha x_k| = \max_k |\alpha| |x_k| = |\alpha| \max_k |x_k| = |\alpha| \|x\|_{\ell^\infty}$

Om $x, y \in \mathbb{K}^n$, er

$$\|x+y\|_{\ell^\infty} = \max_k \underbrace{|x_k + y_k|}_{\leq |x_k| + |y_k|} \leq \max_k (|x_k| + |y_k|)$$

$$\leq \left(\max_k |x_k| \right) + \left(\max_k |y_k| \right) = \|x\|_{\ell^\infty} + \|y\|_{\ell^\infty},$$

der vi har brukt at

$$\alpha_k \leq \beta_k, k=1, \dots, n \quad \Rightarrow \quad \max_k \alpha_k \leq \max_k \beta_k$$

$$\text{og } \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}, k=1, \dots, n \quad \Rightarrow \quad \max_k (\alpha_k + \beta_k) \leq \left(\max_k \alpha_k \right) + \left(\max_k \beta_k \right).$$

□

Eksempel:

La $p \in [1, \infty)$. Da er ℓ^p -normen på $\mathbb{K}^n$ (eller p -normen)

$$\|x\|_{\ell^p} := \left(|x_1|^p + \dots + |x_n|^p \right)^{1/p}.$$

Fakta: $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_{\ell^p} = \|x\|_{\ell^\infty}.$ □

→ Def: Enhetskula $\overline{B}_1(0)$, enhetskølen $\partial B_1(0)$. Visualiser disse i $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\ell^p})$.

Eksempel:

La $A \subseteq \mathbb{R}$ og la $C^0(A, \mathbb{R}) := \{\text{alle kont. } f: A \rightarrow \mathbb{R}\}.$

Da er $C^0(A, \mathbb{R})$ et vektorrum, og supremumsnormen

$$\|f\|_{\sup} := \sup_{t \in A} |f(t)|$$

er en norm. (Kaller også $\|f\|_{C^0}$ eller $\|f\|_C$.) □

Eksempel:

La $p \in [1, \infty)$. L^p -normen på $C^0([a, b], \mathbb{R})$ er

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$



Supremumsnormen eller L^∞ -normen er

$$\|f\|_{L^\infty} := \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|.$$
 □

Eksempel:

La $p \in [1, \infty)$. Da er $\ell^p(\mathbb{K}) := \{(a_1, a_2, \dots) : a_1, a_2, \dots \in \mathbb{K} \text{ og } \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p < \infty\}.$

ℓ^p -normen på $\ell^p(\mathbb{K})$ er

$$\|a\|_{\ell^p} := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p \right)^{1/p}$$

for $a = (a_1, a_2, \dots) \in \ell^p(\mathbb{K}).$ □

Eksempel:

$$\ell^\infty(K) := \{ (a_1, a_2, \dots) : a_1, a_2, \dots \in K \text{ og } \nexists \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k| < \infty \}.$$

ℓ^∞ -normen på $\ell^p(K)$ er $\|a\|_{\ell^\infty} := \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k|$.

□

Oppg. 3.1.4: Om U har basis $\mathcal{B}$, er $\|u\| := \| [u]_{\mathcal{B}} \|_2$ en norm på U .

Prop. 3.1.5 (den omvendte trekantulikheten):

Om $(U, \|\cdot\|)$ er et normert vektorrom, er

$$|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\| \quad \forall u, v \in U.$$

Bewis:

$$\|u\| = \|u - v + v\| \leq \|u - v\| + \|v\|, \text{ og}$$

$$\|v\| = \|v - u + u\| \leq \|v - u\| + \|u\| = \|u - v\| + \|u\|.$$

□

3.2 Konvergens

Def 3.2.1: En følge i et vektorrom er en liste $(u_1, u_2, \dots)$ for $u_k \in U \quad \forall k$. Vi skriver gjerne $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Def. 3.2.2: La $(U, \|\cdot\|)$ være et normert vektorrom. En følge $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergerer mot u (for en $u \in U$) om det for alle $\varepsilon > 0$ finnes en $N \in \mathbb{N}$ s.a. $\|u_k - u\| < \varepsilon \quad \forall k \geq N$.
Med andre ord: $\|u_k - u\| \rightarrow 0$ når $k \rightarrow \infty$. Vi skriver

$$u_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u \quad \text{eller} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} u_k = u. \quad \text{eller} \quad u_k \rightarrow u \text{ når } k \rightarrow \infty.$$

Eksempel:

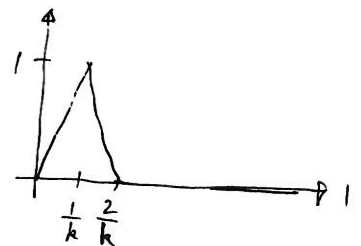
La $u_k \in C^0([0,1], \mathbb{R})$ være gitt ved $u_k(t) := \begin{cases} kt & t \leq \frac{1}{k} \\ 2 - kt & \frac{1}{k} < t \leq \frac{2}{k} \\ 0 & t > \frac{2}{k} \end{cases}$

La $\|v\|_{L^1} := \int_0^1 |v(t)| dt$ for $v \in U$. Da er

$$\|u_k - 0\|_{L^1} = \frac{1}{k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0.$$

For $\|v\|_{L^\infty} := \max_{t \in [0,1]} |v(t)|$, vil derimot

$$\|u_k - 0\|_{L^\infty} = 1 \not\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0.$$



□

Def. 3.2.5

La $(U, \|\cdot\|)$ være et normert vektorrom. ^{La $u \in U$ og $r > 0$} Den åpne kule sentrert i u med radius r er

$$B_r(u) := \{v \in U : \|u - v\| < r\}.$$

Den lukkede (...) er

$$\overline{B}_r(u) := \{v \in U : \|u - v\| \leq r\}.$$

Def. 3.2.6:

La $E \subseteq U$.

(i) E er åpen om det for enhver $u \in E$ finnes en $r > 0$ slik at $B_r(u) \subseteq E$.

(ii) E er lukket om det for enhver ^{konvergent} følge $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ av vektorer $u_k \in E$, er slik at $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k \in E$.

(iii) E er begrenset om det finnes $r > 0$ slik at $E \subseteq B_r(0)$.

Oppg: (a) Alle kuler er begrensede

(b) Alle åpne kuler er åpne

(c) Alle lukkede kuler er lukket.

3.3 Kontinuitet

Def. 3.3.1: La U og V være normerte vektorrom, la $E \subseteq U$ og la $f: E \rightarrow V$. Da er f kontinuerlig i $u \in E$ om det for hver $\varepsilon > 0$ finnes $\delta > 0$ n.a.

$$\|f(u) - f(v)\|_V < \varepsilon \quad \forall v \in E : \|u - v\| < \delta.$$

$\forall$ mer at f er kontinuerlig om f er kont. i alle $u \in E$.

$$C^0(E, V) = C(E, V) := \{\text{alle kont. } f: E \rightarrow V\}.$$

En funksjon $f: E \rightarrow V$ er Lipschitz-kont. om $\exists L > 0$ n.a.

$$\|f(u) - f(v)\| \leq L \|u - v\| \quad \forall u, v \in E.$$

Oppg.: Lipschitz-kont. $\Rightarrow$ kont.

Prop. 3.3.3: La U, V, E, f som i def. 3.3.1. Da er f kont. i u hvis:

Om $(u_k)_k$ er en følge i E som konv. mot u , vil også $(f(u_k))_k$ konv. mot $f(u)$.

(f bevarer konvergens).

Beris:

$\Rightarrow$ La $\varepsilon > 0$, og la $\delta > 0$ n.a. $\|u - v\| < \delta \Rightarrow \|f(u) - f(v)\| < \varepsilon$.
La $N \in \mathbb{N}$ n.a. $\|u - u_k\| < \delta \quad \forall k \geq N$. Da er $\|f(u) - f(u_k)\| < \varepsilon$.
Altså vil $f(u_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(u)$.

$\Leftarrow$ Anta motsatt at f ikke er kont. Da finnes $\varepsilon > 0$ n.a. for enhver $\delta > 0$ finnes $v \in E$ slik at $\|u - v\|_U < \delta$ men $\|f(u) - f(v)\|_V \geq \varepsilon$. Velg $\delta = \frac{1}{k}$ ($k \in \mathbb{N}$) og velg $v_k \in E$ n.a. $\|u - v_k\|_U < \frac{1}{k}$ men $\|f(u) - f(v_k)\|_V \geq \varepsilon$. Da

vil $v_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u$, men $f(v_k) \not\xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(u)$ $\nexists$.

Eksempel:

La $U := C^0([0,1], \mathbb{R})$ være udstyrt med $\|\cdot\|_{\text{sup}}$, og
~~la $\mathbb{R}$ være udstyrt med t.f.~~ La $T: U \rightarrow \mathbb{R}$ være
 givet ved

$$(T(f))(t) := \int_0^t f(s) ds \quad (t \in [0,1]).$$

Da er T kontinuerlig, for

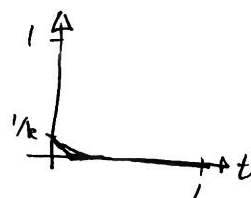
$$\begin{aligned} |T(f)(t) - T(g)(t)| &= \left| \int_0^t f(s) - g(s) ds \right| \\ &\leq \int_0^t |f(s) - g(s)| ds \leq \int_0^t \|f - g\|_{\text{sup}} ds \leq \|f - g\|_{\text{sup}}, \end{aligned}$$

så $\|T(f) - T(g)\|_{\text{sup}} \leq \|f - g\|_{\text{sup}}$, så T er Ljapunov.

$$U := C^\infty([0,1], \mathbb{R}),$$

På den anden side er $S: U \rightarrow U$ givet ved $S(f) := \frac{df}{dt}$

ikke kont.: La $f_k(t) := \begin{cases} 0 & t \geq 1/k \\ \frac{1-t}{1/k} & 0 \leq t < 1/k \end{cases}$



Da vil $\|f_k - 0\|_{\text{sup}} \rightarrow 0$, men

$$\|S(f_k) - S(0)\|_{\text{sup}} = 1 \not\rightarrow 0.$$

Eksempel:

$f: U \rightarrow \mathbb{R}$ givet ved $f(u) := \|u\|$ er kont. (opgave!).

Teorem 3.3.5 (ekstremalverdisetn.):

La U være endeligdim. over $\mathbb{R}$, la $E \subseteq U$ være lukket og begrenset, og la $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ være kontinuert. Da finnes $u_{\min}, u_{\max} \in E$ slik at

$$f(u_{\min}) \leq f(u) \leq f(u_{\max}) \quad \forall u \in E.$$

(Bevis i 3.4).

Teorem 3.3.6

La U og V være normerte og la $T \in \mathcal{L}(U, V)$. Da er følgende ekv.

(i) T er kontinuert

(ii) T er kont. i 0

(iii) det finnes $c \geq 0$ s.a. $\|Tu\|_V \leq c\|u\|_U \quad \forall u \in U$

(iv) $\|Tu\|_V \leq c \quad \forall u \in U, \|u\|_U = 1$.

Bevis: Vi viser $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (i)$ i bokst.

$(i) \Rightarrow (ii)$ og $(iii) \Rightarrow (iv)$ er opplagte.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: For $\varepsilon := 1$ finnes $\delta > 0$ s.a. $\|u - 0\|_U < \delta \Rightarrow \|Tu - T0\|_V = \|Tu\|_V < 1$. For en vilkårlig $v \in U$

vel $u := v \cdot \frac{\delta}{2\|v\|_U}$ har norm $\|u\|_U = \frac{\delta}{2} < \delta$, så

$$1 > \|Tu\|_V = \frac{\delta}{2\|v\|_U} \|Tv\|_V \Rightarrow \|Tv\|_V \leq c\|v\|_U, \text{ der } c := \frac{2}{\delta}.$$

$(iv) \Rightarrow (i)$: La $u \in U$, og la $\varepsilon > 0$. La $\delta > 0$ s.a.

$\|w\|_U < \delta \Rightarrow \|Tw\|_V < \varepsilon$. Da vil

$$\|u - v\|_U < \delta \Rightarrow \|Tu - Tv\|_V = \|T(u - v)\|_V < \varepsilon.$$

Eksempel: La $p \in [1, \infty)$

Mengden $\ell^p(K)$ er defineret som (her er $K = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$)

$$\ell^p(K) := \{a = (a_1, a_2, \dots) : a_k \in K \forall k, \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p < \infty\}.$$

ℓ^p -normen på $\ell^p(K)$ er $\|a\|_{\ell^p(K)} := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p \right)^{1/p}.$

Definer $T: \ell^1(\mathbb{R}) \rightarrow \ell^1(\mathbb{R})$ ved $T(a_1, a_2, \dots) = (0, a_1, a_2, \dots)$

(højreskift). Da er T lineær, og

$$\|T(a)\|_{\ell^1} = \|(0, a_1, a_2, \dots)\|_{\ell^1} = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \|a\|_{\ell^1},$$

så T er kont.

Merk forøvrig at T har en venstreinvert: Om

$S: \ell^1(\mathbb{R}) \rightarrow \ell^1(\mathbb{R}), S(a) := (a_2, a_3, \dots)$, er $ST = \text{id}_{\ell^1}$,

men $TS \neq \text{id}_{\ell^1}$, så T er ikke inverterbar.

□

Opg. 3.3.4:

• Komposition af kont. funk. er kont.

• $\|\cdot\|$ er kont.

• Om f er kont., er ~~egne~~ $f^{-1}(F)$ åben $\forall$ åbne $F \subseteq V$

• Om f er kont., er $f^{-1}(\#)$ lukket $\forall$ lukkede $F \subseteq V$