

3.4: Ekvivalens mellom normer

Def: La U være et vektorrom med normer $\|\cdot\|_1$ og $\|\cdot\|_2$.

Disse normene er ekvivalente om $\exists c_1, c_2 > 0$ s.d.

$$\|u\|_1 \leq c_1 \|u\|_2 \quad \text{og} \quad \|u\|_2 \leq c_2 \|u\|_1 \quad \forall u \in U.$$

Obs: $\|\cdot\|_1$ og $\|\cdot\|_2$ ekv. hvis $B_{c_1}(0) \supseteq B_1(0)$ og $B_{c_2}(0) \supseteq B_1(0)$

Eksempel: Om $\|u\|_2 := A \cdot \|u\|_1$ for en $A > 0$, er $\|\cdot\|_1$ og $\|\cdot\|_2$ ekv., med $c_2 = A$ og $c_1 = \frac{1}{A}$.

Eksempel: La $\|\cdot\|_{\ell^1}$ og $\|\cdot\|_{\ell^\infty}$ være 1- og ∞ -normene på $\mathbb{R}^n$.

Disse er ekvivalente. Merk først at for alle $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\text{er} \quad |u_j| \leq \|u\|_{\ell^1} \quad \text{og} \quad |u_j| \leq \|u\|_{\ell^\infty}.$$

Dermed er

$$\|u\|_{\ell^1} = \sum_{j=1}^n |u_j| \leq n \|u\|_{\ell^\infty}$$

$$\text{og} \quad \|u\|_{\ell^\infty} = \max(|u_1|, \dots, |u_n|) \leq \|u\|_{\ell^1}.$$

(Vi får $c_1 = n$ og $c_2 = 1$.)

Oppg. 3.4.5: La $\|\cdot\|_1$ og $\|\cdot\|_2$ være ekvivalente.

(a) Om en følge konvergerer mhp. $\|\cdot\|_1$, konvergerer den også mhp. $\|\cdot\|_2$.

(b) $B_r(u) \subseteq B_{c_1 r}(u)$ og $B_r'(u) \subseteq B_{c_2 r}(u)$ $\forall r > 0, u \in U$.

(c) $E \subseteq U$ er åpen/lukket/begrenset mhp. $\|\cdot\|_1$ hvis den er det mhp. $\|\cdot\|_2$.

Lemma:

La $(U, \|\cdot\|_U)$ være et normert vektorrom over $K = \mathbb{R}/\mathbb{C}$.

La $u_1, \dots, u_n \in U$, og la $S: K^n \rightarrow U$ være gitt ved

$$Sx := \sum_{j=1}^n x_j u_j \quad \text{for } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n.$$

Da finnes $c_1, c_2 \geq 0$ slike at

$$(*) \quad c_1 \|x\|_{\ell^2} \leq \|Sx\|_U \leq c_2 \|x\|_{\ell^2} \quad \forall x \in K^n.$$

Hvis $(u_1, \dots, u_n)$ er lin. uavh., er $c_1, c_2 > 0$.

Bevis:

= Steg 1: $f(x) := \|Sx\|_U$ er kontinuerlig for $x \in E := \{x \in K^n : \|x\|_{\ell^2} = 1\}$.

$$|f(x) - f(y)| = \left| \|Sx\|_U - \|Sy\|_U \right| \stackrel{(\text{omt. \Delta-ult.})}{\leq} \|Sx - Sy\|_U$$

$$= \left\| \sum_{j=1}^n (x_j - y_j) u_j \right\|_U \leq \sum_{j=1}^n \underbrace{|x_j - y_j|}_{\leq \|x - y\|_{\ell^2}} \|u_j\|_U \leq L \|x - y\|_{\ell^2}$$

$$\text{der } L := \sum_{j=1}^n \|u_j\|_U.$$

- Steg 2: Anvend ekstremalverdisetn.

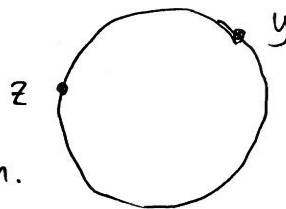
Siden f er kont. og E er lukket og begrenset, finnes $y, z \in E$ slike at $f(y) \leq f(x) \leq f(z) \quad \forall x \in E$

$$\text{La } c_1 := f(y), \quad c_2 := f(z).$$

- Steg 3: Vis at $c_1, c_2 > 0$ når $(u_1, \dots, u_n)$ lin. uavh.

- Steg 4: Bevis (*)

$$\|Sx\|_U = \|x\|_{\ell^2} \left\| S\left(\frac{x}{\|x\|_{\ell^2}}\right) \right\|_U = \|x\|_{\ell^2} f\left(\frac{x}{\|x\|_{\ell^2}}\right) \begin{cases} \leq \|x\|_{\ell^2} c_2 \\ \geq \|x\|_{\ell^2} c_1 \end{cases}$$



Teorem 3.4.7:

La U være et endeligdim. vektorrom over $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$.
Da er alle normer på U ekvivalente.

Basis:

La $\|\cdot\|_1$ være en norm på U ; vi konstruerer en ekv. norm $\|\cdot\|_2$.

La $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ være en basis for U . La $S: \mathbb{K}^n \rightarrow U$,

$$Sx := \sum_{j=1}^n x_j u_j \quad \text{for } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n. \quad \text{Da er}$$

$$[Sx]_{\mathcal{B}} = x$$

$$\forall x \in \mathbb{K}^n,$$

så S er inverterbar (med invers $S^{-1}u = [u]_{\mathcal{B}}$), og
altå en isomorfi.

Definer $\|u\|_2 := \|[u]_{\mathcal{B}}\|_{\ell^2}$. Av lemmaet finnes $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2 > 0$ s.a.

$$c_1 \|x\|_{\ell^2} \leq \|Sx\|_U \leq c_2 \|x\|_{\ell^2}.$$

Sett inn $x = [u]_{\mathcal{B}}$ og få $\|x\|_{\ell^2} = \|u\|_2$ og $Sx = u$, slik at

$$c_1 \|u\|_2 \leq \|u\|_1 \leq c_2 \|u\|_2.$$

Sett $\tilde{c}_1 = c_2$ og $\tilde{c}_2 = 1/c_1$:

$$\|u\|_2 \leq \tilde{c}_2 \|u\|_1 \quad \text{og} \quad \|u\|_1 \leq \tilde{c}_1 \|u\|_2.$$



Teorem 3.4.8: La U, V være normerte vektorrom,

La U være endeligdim. og la $T \in \mathcal{L}(U, V)$. Da er T kont.

Beris:

La $B = (u_1, \dots, u_n)$ være en basis for U , og la $v_j := Tu_j$ ($j=1, \dots, n$).

Definer $S: \mathbb{K}^n \rightarrow U$ og $\tilde{S}: \mathbb{K}^n \rightarrow V$ ved

$$Sx := \sum_{j=1}^n x_j u_j \quad \text{og} \quad \tilde{S}x := \sum_{j=1}^n x_j v_j \quad \forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n.$$

Da finnes $c_1, c_2 > 0$ og $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2 \geq 0$ s.d.

$$c_1 \|x\|_{\ell^2} \leq \|Sx\|_U \leq c_2 \|x\|_{\ell^2}, \quad \tilde{c}_1 \|x\|_{\ell^2} \leq \|\tilde{S}x\|_V \leq c_2 \|x\|_{\ell^2} \quad \forall x \in \mathbb{K}^n.$$

Da er (for $u \in U$)

$$\|Tu\|_V = \|T(\sum_{j=1}^n x_j u_j)\|_V = \|\sum_{j=1}^n x_j \underbrace{Tu_j}_{=v_j}\|_V = \|\tilde{S}x\|_V$$

der $x = [u]_B$, så $Sx = u$

$$\leq \tilde{c}_2 \|x\|_{\ell^2} \leq \frac{\tilde{c}_2}{c_1} \|Sx\|_U = \frac{\tilde{c}_2}{c_1} \|u\|_U =: c \|u\|_U.$$

Teorem 3.3.5 (ekstremalv. setn.) La U endeligdim.

La $E \subseteq U$ lukket og $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ kont. Da $\exists$ maks/min i E .

Beris: La $S: \mathbb{R}^n \rightarrow U$, $S^{-1}u := [u]_B$, B en basis.

La $F := S^{-1}(E) = \{x: Sx \in E\}$. Da er F lukket og begrenset.

La $h: F \rightarrow \mathbb{R}$, $h := f \circ S$, som er kont. Av ekstr. setn.

$\exists$ min, maks for h .

(som korollar av 3.4.8)

3.5 Matrisenormer

3.5.1: Operatornormen til en lin. avb.

Def: La U og V være normerte vektorrom og la $T \in \mathcal{L}(U, V)$.

Operatornormen til T er

$$\|T\|_{\mathcal{L}(U, V)} := \sup_{\substack{u \in U \\ u \neq 0}} \frac{\|Tu\|_V}{\|u\|_U} = \sup_{\substack{u \in U \\ \|u\|_U = 1}} \|Tu\|_V.$$

Vi skriver ofte bare $\|T\|_{\mathcal{L}}$.

Oppg: De to supremumene er like.

Eks.: $\|\text{id}_U\|_{\mathcal{L}(U, U)} = 1$.

Prop. 3.5.3: La U, V, W være normerte vektorrom.

(i) Om $T \in \mathcal{L}(U, V)$, er T kontinuerlig hvis $\|T\|_{\mathcal{L}} < \infty$.

(ii) Om $T \in \mathcal{L}(U, V)$ er kontinuerlig, er

$$\|Tu\|_V \leq \|T\|_{\mathcal{L}} \|u\|_U \quad \forall u \in U,$$

og $c := \|T\|_{\mathcal{L}}$ er det minste tallet slikt at $\|Tu\|_V \leq c \|u\|_U \quad \forall u$.

(iii) Om $T \in \mathcal{L}(U, V)$ og $S \in \mathcal{L}(V, W)$ er kontinuerlige, er

$$\|ST\|_{\mathcal{L}(U, W)} \leq \|S\|_{\mathcal{L}(V, W)} \|T\|_{\mathcal{L}(U, V)}.$$

Bewis: Oppgave, men vi viser (iii) direkte. Vi har

$$\begin{aligned} \|ST\|_{\mathcal{L}(U, W)} &:= \sup_{u: u \neq 0} \frac{\|STu\|_W}{\|u\|_U} = \sup_{\substack{u: u \neq 0, \\ Tu \neq 0}} \frac{\|STu\|_W}{\|Tu\|_V} \frac{\|Tu\|_V}{\|u\|_U} \\ &\leq \sup_{\substack{u: u \neq 0, \\ Tu \neq 0}} \frac{\|STu\|_W}{\|Tu\|_V} \underbrace{\sup_{\substack{u: u \neq 0, \\ Tu \neq 0}} \frac{\|Tu\|_V}{\|u\|_U}}_{= \|T\|_{\mathcal{L}}} \leq \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{\|Sv\|_W}{\|v\|_V} \|T\|_{\mathcal{L}} \\ &= \|S\|_{\mathcal{L}} \|T\|_{\mathcal{L}}. \end{aligned}$$

(for om $Tu = 0$, vil $\|STu\|_W = 0$)

Prop. 3.5.4

La U og V være normerte vektorrom, og la U være endeligdim. Da er $\|\cdot\|_L$ en norm på $L(U, V)$.

Bewis:

Vi har $0 \leq \|T\|_L < \infty$ for alle $T \in L(U, V)$, siden U er endeligdim., og om $\|T\|_L = 0$ er $\|Tu\|_V \leq 0 \cdot \|u\| = 0$ $\forall u \in U$, så $Tu = 0 \forall u$, så $T = 0$.

Om $\alpha \in K$ er

$$\|\alpha T\|_L = \sup_{u \neq 0} \frac{\|(\alpha T)u\|_V}{\|u\|_U} = \sup_{u \neq 0} \frac{|\alpha| \|Tu\|_V}{\|u\|_U} = |\alpha| \|T\|_L.$$

Om $S, T \in L(U, V)$, er

$$\begin{aligned} \|S+T\|_L &= \sup_{u \neq 0} \frac{\|Su+Tu\|_V}{\|u\|_U} \leq \sup_{u \neq 0} \frac{\|Su\|_V + \|Tu\|_V}{\|u\|_U} \\ &\leq \sup_u \frac{\|Su\|}{\|u\|} + \sup_u \frac{\|Tu\|}{\|u\|} = \|S\|_L + \|T\|_L. \end{aligned}$$

Eksempel:

$C^0([0, 2], \mathbb{R})$ utstyrt med $\|\cdot\|_{\max}$, $T: C^0 \rightarrow \mathbb{R}$, $Tf := \int f dt$.

□

Merknad: For uendeligdim. U finnes $T \in L(U, V)$ med $\|T\|_L = \infty$, som er nettopp diskontinuerlige T . Derfor studerer man istedet $B(U, V) := \{\text{alle lineære, kontinuerlige } T: U \rightarrow V\}$.

3.5.2. Operatornormen på matriser

Def: La $K = \mathbb{R}$ eller $K = \mathbb{C}$, og $A \in M_{m \times n}(K)$.

Operatornormen til A er

$$\|A\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)} := \sup_{\substack{x \in K^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_{\ell^2}}{\|x\|_{\ell^2}} = \sup_{\substack{x \in K^n \\ \|x\|_{\ell^2} = 1}} \|Ax\|_{\ell^2}.$$

Eksempel: $\|I_n\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} = 1$.

Teorem 3.5.6:

- (i) $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ er en norm på $M_{m \times n}(K)$
- (ii) Alle normer på $M_{m \times n}(K)$ er ækvivalente
- (iii) $\|Ax\|_{\ell^2} \leq \|A\|_{\mathcal{L}} \|x\|_{\ell^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, og $C := \|A\|_{\mathcal{L}}$ er det mindste tal, så at (...).
- (iv) Om $A \in M_{m \times n}(K)$ og $B \in M_{n \times p}(K)$, er
$$\|AB\|_{\mathcal{L}} \leq \|A\|_{\mathcal{L}} \|B\|_{\mathcal{L}}$$
- (v) Om A er inverterbar, er $\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}} \geq \frac{1}{\|A\|_{\mathcal{L}}}$.

Bevis for (v): $1 = \|I_n\|_{\mathcal{L}} = \|AA^{-1}\|_{\mathcal{L}} \leq \|A\|_{\mathcal{L}} \|A^{-1}\|_{\mathcal{L}}$. $\blacksquare$

Opg. 3.5.7: Maksnormen $\|A\|_{\infty} := \max_{j,k} |(A)_{jk}|$ er en norm på $M_{m \times n}$.

Opg. 3.5.8: Om $A \in M_n(K)$ er en diagonalmatrix (dvs. $(A)_{jk} = 0$ $\forall j \neq k$), er $\|A\|_{\mathcal{L}} = \max_j |(A)_{jj}|$.

Vi skal senere se at operatornormen kan beregnes
vha. egenverdier og egenvektorer.

Exempel:

Vi vil estimere operatornormen til $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$.

Vi vet at $\exists c_1, c_2 > 0$ slike at

$$\|A\|_2 \leq c_1 \|A\|_\infty \quad \text{og} \quad \|A\|_\infty \leq c_2 \|A\|_2,$$

$$\text{nå} \quad \frac{1}{c_2} \|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq c_1 \|A\|_\infty,$$

(og $\|A\|_\infty$ er lett å beregne). Vi har

$$\|A\|_2 := \sup_{\substack{u \in \mathbb{K}^n \\ u \neq 0}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

Her er $\|y\|_{\ell^2(\mathbb{R}^m)} \leq \sqrt{m} \|y\|_{\ell^\infty(\mathbb{R}^m)} \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$, nå

$$\begin{aligned} \|Ax\|_{\ell^2} &\leq \sqrt{m} \|Ax\|_{\ell^\infty} = \sqrt{m} \max_j \left| \sum_{k=1}^n A_{jk} x_k \right| \\ &\leq \sqrt{m} \max_j \sum_{k=1}^n \underbrace{|A_{jk}|}_{\leq \|A\|_\infty} |x_k| = \sqrt{m} \|A\|_\infty \|x\|_{\ell^1}. \end{aligned}$$

Vi har

$$\begin{aligned} \|x\|_{\ell^1}^2 &= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n |x_k| |x_\ell| \leq \sum_{k,\ell} \left(\frac{|x_k|^2}{2} + \frac{|x_\ell|^2}{2} \right) \\ &= n \|x\|_{\ell^2}^2, \end{aligned}$$

nå $\|x\|_{\ell^1} \leq \sqrt{n} \|x\|_{\ell^2}$. Altså er

$$\frac{\|Ax\|_{\ell^2}}{\|x\|_{\ell^2}} \leq \frac{\sqrt{m} \|A\|_\infty \|x\|_{\ell^1}}{\|x\|_{\ell^2}} \leq \sqrt{nm} \|A\|_\infty, \quad \text{nå } c_1 = \sqrt{nm}$$

Motsett: Anta at $|A_{jk}| = \|A\|_\infty$, og la $\bar{x}_k := e_k$. Da er

$$\|A\|_2 \geq \frac{\|A\bar{x}\|_{\ell^2}}{\|\bar{x}\|_{\ell^2}} = \left\| \begin{pmatrix} A_{1k} \\ A_{2k} \\ \vdots \\ A_{jk} \\ \vdots \\ A_{mk} \end{pmatrix} \right\|_{\ell^2} \geq |A_{jk}| = \|A\|_\infty,$$

nå $c_2 = 1$. $\square$