

Kap. 4: Indreproduktrom

För $x, y \in \mathbb{R}^n$: $x \cdot y = \sum_{k=1}^n x_k y_k$; för $x, y \in \mathbb{C}^n$: $x \cdot y = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}$.
(der $\overline{y_k}$ er komplekserkonjugert).

4.1: Indreprodukter

Def: La U være et vektorrom over $K = \mathbb{R}$ eller $K = \mathbb{C}$.

Et indreprodukt er en funksjon $\langle \cdot, \cdot \rangle : U \times U \rightarrow K$ slik at

(i) $\langle u, u \rangle \geq 0 \quad \forall u \in U$, og $\langle u, u \rangle = 0$ hvis $u = 0$

(ii) $\langle u+v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \quad \forall u, v, w \in U$

(iii) $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in U, \alpha \in K$

(iv) $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle} \quad \forall u, v \in U$.

Et vektorrom utstyrt med et indreprodukt er et indreproduktrom. (Kalles i noen tilfeller et Hilbert-rom.)

Oppg (oblig):

(a) Indreprodukt er additivt i andre argument

(b) ——— konjugert-homogen ———

(c) Om $K = \mathbb{R}$, er indreproduktet ~~konjugert~~ symmetrisk.

Eksempler:

(a) (Oblig) $\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}^n} := x \cdot y = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}$

(b) Om $A \in M_n(K)$ er selvadjungert og pos. def., er

$$\langle x, y \rangle_A := x^T A y = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n x_j A_{jk} \overline{y_k}$$

et indreprodukt på K^n .

(c) (Oblig) La $l^2(K) := \left\{ (a_1, a_2, \dots) : a_k \in K \forall k, \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty \right\}$.

Da er $\langle a, b \rangle_{l^2} := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overline{b_k}$ et indreprodukt på $l^2(K)$.

(d) (Oblig) For $f, g \in C^0([a, b], K)$ er

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt$$

L^2 -indreproduktet.

□

Oppg: La $u \in U$ være slik at $\langle u, v \rangle = 0 \quad \forall v \in U$.

Da er $u = 0$. Samme om $\langle v, u \rangle = 0 \quad \forall v \in U$.

□

Merk: Om $\langle u, w \rangle = \langle v, w \rangle \quad \forall w \in U$, er $u = v$.

Vi tenker på $\langle u, w \rangle$ som en "observasjon/måling av u fra synsvinkelen w ".

□

Def: $u, v \in U$ er ortogonale, $u \perp v$, om $\langle u, v \rangle = 0$.

4.2: Normen induert av et indreprodukt

Def: La U være et vektorrom med indreprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Normen induert av dette indreproduktet er funksjonen

$$\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle}, \quad u \in U.$$

Eksempel: Euklidisk norm på $\mathbb{R}^n / \mathbb{C}^n$ er normen induert av prikkproduktet. Tilsvarende for ℓ^2 / L^2 .

Teorem (Cauchy-Schwarz-ulikheten)

La $\|\cdot\|$ være normen induert av indreproduktet $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Da er

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\| \quad \forall u, v \in U.$$

Det er likhet i uttrykket ovenfor hvis u og v er parallelle, dvs. $u = \alpha v$ eller $v = \alpha u$ for en $\alpha \in \mathbb{K}$.

Bervis:

La $u=0$ eller $v=0$. Hvis ikke, er

$$0 \leq \left\| u - \underbrace{\frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2}}_{=: \alpha} v \right\|^2 = \langle u - \alpha v, u - \alpha v \rangle$$

$$= \langle u, u - \alpha v \rangle - \alpha \langle v, u - \alpha v \rangle$$

$$= \langle u, u \rangle - \bar{\alpha} \langle u, v \rangle - \alpha \langle v, u \rangle + \alpha \bar{\alpha} \langle v, v \rangle$$

$$= \|u\|^2 - \frac{\overline{\langle u, v \rangle} \langle u, v \rangle}{\|v\|^2} - \frac{\langle u, v \rangle \overline{\langle u, v \rangle}}{\|v\|^2} + \frac{\langle u, v \rangle \overline{\langle u, v \rangle}}{\|v\|^4} \|v\|^2$$

$$= \|u\|^2 - \frac{|\langle u, v \rangle|^2}{\|v\|^2}.$$

Stikk om og ta kvadratroten.

Ta
muntlig

Det er likhet ovenfor hvis og bare hvis $u - \alpha v = 0$, der $\alpha = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2}$.
~~det vil si~~ som impliserer at $u \parallel v$. Motstrøtt,
 om $u \parallel v$ er $u = \beta v$ for en $\beta \in \mathbb{K}$, ~~ikke~~
 $u \neq \beta v \neq 0$, så $\langle u, v \rangle = \beta \langle v, v \rangle = \beta \|v\|^2$,
 så $\beta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2}$, som gir

$$u = \alpha v = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} v,$$

 som igjen gir likhet i C-S. ■

Prop. 4.2.3:

Normen induert av et indreprodukt er en norm.

Beris:

Vi beriser bare trekantulikh. For $u, v \in V$ er

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &= \|u\|^2 + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2. \end{aligned}$$
■

Teorem 4.2.5 (Pythagoras)

Om $u \perp v$ er $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

Beris: $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \|v\|^2$. ■

4.3 Ortogonal og ortonormal liste

Def. La U være et indreproduktrom. En liste $(u_1, \dots, u_n)$ i U er ortogonal om ingen af $u_1, \dots, u_n$ er lik 0, og om $\langle u_j, u_k \rangle = 0 \quad \forall j \neq k$. Listen er ortonormal om den i tillegg er slik at $\|u_k\| = 1 \quad \forall k$, hvor $\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle}$.

Med andre ord: $(u_1, \dots, u_n)$ er ortonormal om

$$\langle u_j, u_k \rangle = \delta_{jk} \quad \forall j, k = 1, \dots, n.$$

Vi kan gjøre en ortogonal liste ortonormal ved å normalisere den:
Om $(u_1, \dots, u_n)$ er ortogonal, er $(v_1, \dots, v_n)$ ortonormal, der
$$v_k := \frac{1}{\|u_k\|} u_k \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

^(oppg)
Opg. Enhver ortogonal liste er lineært uavhengig.

Opg. Legendre-polynomene $(p_0, \dots, p_n)$ er en ortogonal liste i vektorrommet $C^0([-1, 1], \mathbb{R})$ med L^2 -indreproduktet.

Prop. 4.3.6: La U ha en ortonormal basis $B = (u_1, \dots, u_n)$.

For enhver $u \in U$ er da
$$u = \sum_{k=1}^n \alpha_k u_k, \quad \alpha_k := \langle u, u_k \rangle \quad \forall k.$$

Med andre ord: $[u]_B = \begin{pmatrix} \langle u, u_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle u, u_n \rangle \end{pmatrix},$ eller

$$u = \sum_{k=1}^n \langle u, u_k \rangle u_k.$$

Hvilke normer kommer fra indreprodukter?

Antag for enkeltheds skyld at $K = \mathbb{R}$. Da er

$$\|u+v\|^2 = \dots = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$$

$$\Rightarrow \langle u, v \rangle = \frac{1}{2} (\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2). \quad (*)$$

Om $\|\cdot\|$ er normen tilhørende et indreprodukt, må derfor (*) være et indreprodukt.

Videre er

$$\|u-v\|^2 = \dots = \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$$

$$\Rightarrow \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

Dette er parallelogramidentiteten. Dermed denne er navn for en norm, er nødvendigvis denne normen tilhørende et indreprodukt!

