

4.5 Projektion og orthogonalprojeksjon

Def: La U være et vektorrom og la $P \in L(U)$. Da er P en projeksjon om $P^2 = P$.

Om $V := \text{im } P$ sier vi at P projiserer ned på V .

Eksempler:

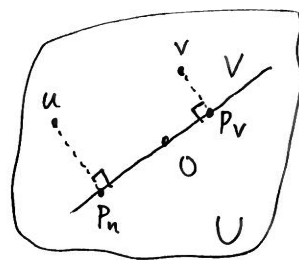
- $P: \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_3$, $P\left(\sum_{k=0}^3 \alpha_k p_k\right) = \sum_{k=1}^3 \alpha_k p_k$, der $(p_0, \dots, p_3)$ er standardbasen.

- $P: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $P\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $P\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

□

Om $V \subseteq U$ er et underrom, tenker vi på ortogonalprojeksjonen ned på V som projeksjon "rett ned på V " eller "vinkelrett ned på V ". Dette gir kun mening om U har et indreprodukt.



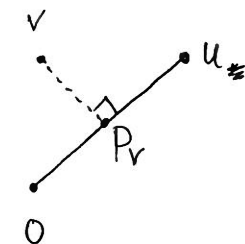
Vi begynner med tilfellet $V = \text{span}(u_*)$, og vil projisere $u \in U$ ned på V .

Vi vil da at $P_v \parallel u_*$, og at $u \perp v - P_v$. Altså må

$$P_v = \alpha u_*, \quad \alpha \in \mathbb{K}$$

og $\langle u, v - P_v \rangle = 0$, dvs

$$\langle u, v \rangle = \langle u, P_v \rangle = \overline{\alpha} \langle u, u_* \rangle$$



$$\Rightarrow \alpha = \frac{\overline{\langle u, v \rangle}}{\langle u, u_* \rangle}$$

$$\sim P_v = \frac{\overline{\langle u, v \rangle}}{\langle u, u_* \rangle} u_* = \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u_* \rangle} u_*$$

Bytt notation $u \leftrightarrow v$

Merk: • P er lineær
• $P^2 = P$

Om $\|u\|=1$ får vi bare $Pv = \langle u, u \rangle u$.

Om $V = \text{span}(u_1, \dots, u_n)$, og $(u_1, \dots, u_n)$ er orthonormal, viser det seg at

$$\text{proj}_V u = \sum_{k=1}^n \langle u, u_k \rangle u_k.$$

Def: Om U indreproduktrom og $V \subseteq U$, er ortog. kompl. til V $V^\perp := \{u \in U : u \perp v \forall v \in V\}$

Teorem:

La U være et indreproduktrom og $V \subseteq U$ et underrom med en orthonormal basis $(v_1, \dots, v_n)$. Da er

$$(*) \quad P_u := \sum_{k=1}^n \langle u, v_k \rangle v_k, \quad u \in U$$

en projeksjon ned på V , og $u - P_u \in V^\perp$.

Def: $(*)$ er ortog. proj. på V . Vi kaller denne proj_V .

Bevis:

P er lineær, og for alle $u \in U$ er

$$\begin{aligned} P(Pu) &= \sum_{k=1}^n \left\langle \sum_{\ell=1}^n \langle u, v_\ell \rangle v_\ell, v_k \right\rangle v_k \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \langle u, v_\ell \rangle \underbrace{\langle v_\ell, v_k \rangle}_{=\delta_{\ell k}} v_k = \sum_{k=1}^n \langle u, v_k \rangle v_k = Pu, \end{aligned}$$

så P er en projeksjon.

Vi viser at $u - P_u \perp v_k$ for $k=1, \dots, n$:

$$\langle u - P_u, v_k \rangle = \langle u, v_k \rangle - \sum_{\ell=1}^n \langle u, v_\ell \rangle \langle v_\ell, v_k \rangle = 0.$$

Dermed er også $u - P_u \perp v$ $\forall v \in \text{span}(v_1, \dots, v_n) = V$. ▀

Korollar:

La U være et indreprod. rom. med et endeligdim. underrom V .

Da kan enhver $u \in U$ dekomponeres på en unik måde som
 $u = v + w$ for $v \in V$ og $w \in V^\perp$.

Med andre ord: $U = V \oplus V^\perp$.

Bævis:

$$\forall u \text{ har } u = \underbrace{Pu}_{\in V} + \underbrace{(u - Pu)}_{\in V^\perp}.$$

For å se at denne dekompon. (Teo. 2.8.1)

er unik, holder det å vise at $V \cap V^\perp = \{0\}$. Om $w \in V \cap V^\perp$, er både $w \in V$ og $\langle w, w \rangle = 0 \forall w \in V$, så $\langle w, w \rangle = 0$, så $w = 0$.

Prop. 4.5.4: La $V \subseteq U$ underrom

- (i) $V^\perp$ er et underrom av U
- (ii) $V \cap V^\perp = \{0\}$
- (iii) $\{0\}^\perp = U$
- (iv) $V^\perp = \{0\}$

Bævis: Oppgave.

Prop. 4.5.7

La $V \subseteq U$ endeligdim.

$$(i) (V^\perp)^\perp = V$$

$$(ii) \dim V^\perp = \dim U - \dim V$$

$$(iii) V^\perp = \{0\} \text{ hvis og bare hvis } V = U.$$

Bævis:

$$(i) \supseteq:$$

$\subseteq$: La $u \in (V^\perp)^\perp$, og skriv $u = v + w$ for $v \in V$ og $w \in V^\perp$.

Siden $u \perp w$, er

$$0 = \langle u, w \rangle = \underbrace{\langle v, w \rangle}_{=0} + \langle w, w \rangle$$

så $w = 0$.

(ii) Oppgave. Bruk dimensjonsformelen på proj $!$

(iii) Vet alt at $U^\perp = \{0\}$. Motstr, om $V^\perp = \{0\}$, er
 ~~$\forall v, w \in U, v \in V^\perp, w \in V$~~

$$0 = \dim V^\perp = \dim U - \dim V,$$

så $\dim V = \dim U$, og siden V er endeligdim.,
er $V = U$. ■

4.5.8 Teorem (Bessels ulikhet)

La U være et indreproduktrom og $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en orthonormal

liste. Da er
$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle u, e_k \rangle|^2 \leq \|u\|^2 \quad \forall u \in U.$$

Beris:

La $V_n := \text{span}(e_1, \dots, e_n)$, og skriv $u = v_n + w_n$ for
 $v_n \in V_n$ og $w_n \in V_n^\perp$. Da er $v_n \perp w_n$, så av Pythagoras

er
$$\|u\|^2 = \|v_n\|^2 + \|w_n\|^2 = \sum_{k=1}^n |\langle u, e_k \rangle|^2 + \|w_n\|^2.$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n |\dots| \leq \|u\|^2$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |\dots| \leq \|u\|^2. \quad \text{■}$$

Prop. 4.5.9

La U være et indreprod. rum med et endeligdim. underrom V .
La $u \in U$ og $u_v := \text{proj}_V u$. Da er

$$\|u - u_v\| \leq \|u - v\| \quad \forall v \in V,$$

med lighed kun når $v = u_v$.

Bewis:

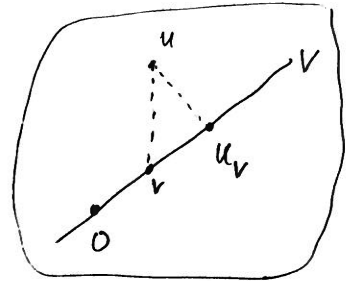
La $v \in V$. Da er

$$u - v = \underbrace{(u_v - v)}_{\in V} + \underbrace{(u - u_v)}_{\in V^\perp}.$$

Av Pythagoras er da

$$\|u - v\|^2 = \|u_v - v\|^2 + \|u - u_v\|^2 \geq \|u - u_v\|^2,$$

med lighed kun når $v = u_v$.



4.4: Ortogonalisering

Teorem (Gram-Schmidt):

La V være et indreproduktrom og la $(u_1, \dots, u_n)$ være lineært uavhengig. Definer

$$v_1 := \frac{1}{\|u_1\|} u_1$$

$$v_k := \frac{1}{\|v_k'\|} v_k', \quad v_k' := u_k - \sum_{\ell=1}^{k-1} \langle u_k, v_\ell \rangle v_\ell \quad (k \geq 2).$$

Da er $(v_1, \dots, v_n)$ ortonormal, og $\text{span}(v_1, \dots, v_n) = \text{span}(u_1, \dots, u_n)$

Beris:

$\forall i$ bruker induksjon. Siden $(u_1, \dots, u_n)$ er lin. uavh., er $u_1 \neq 0$, så v_1 er veldef., og (v_1) er ortonormal, og $\text{span}(v_1) = \text{span}(u_1)$.

Anta at $(v_1, \dots, v_k)$ (for $1 \leq k < n$) er ortonormal og har samme spenn som $(u_1, \dots, u_k)$. Siden $(u_1, \dots, u_{k+1})$ er lin. uavh., er $u_{k+1} \notin \text{span}(u_1, \dots, u_k)$, så

$u_{k+1} \neq 0$. For $\ell \leq k$ er

$$\begin{aligned} \langle v_{k+1}', v_\ell \rangle &= \langle u_{k+1} - \sum_{j=1}^k \langle u_{k+1}, v_j \rangle v_j, v_\ell \rangle \\ &= \langle u_{k+1}, v_\ell \rangle - \sum_{j=1}^k \langle u_{k+1}, v_j \rangle \underbrace{\langle v_j, v_\ell \rangle}_{=\delta_{j\ell}} \\ &= 0, \end{aligned}$$

så $v_{k+1}' \perp v_1, \dots, v_k$. ▀

4.6 Riesz' representersteorem

Teorem

La U endeligdim. indreprod. rom og la $T \in U' := \mathcal{L}(U, \mathbb{K})$.

Da finnes en $u \in U$ slik at

$$Tv = \langle v, u \rangle \quad \forall v \in U.$$

Bewis (skisse): La $(v_1, \dots, v_n)$ o.n. basis og velg $u := \sum_{k=1}^n \overline{T v_k} v_k$. ■

Idé: Om $T \in \mathcal{L}(U, \mathbb{K})$, er $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \in M_{1 \times n}(\mathbb{K})$ (der $n = \dim U$),
og " $M_{1 \times n}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^n \cong U$ ".

4.7: Den adjungerte

Om $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, er $A^T \in M_{n \times m}(\mathbb{K})$, og $(A^T)_{jk} = (A)_{kj}$.

For $x, y \in \mathbb{K}^n$, $y \in \mathbb{K}^m$, er

$$(Ax) \cdot y = (Ax)^T \bar{y} = x^T A^T \bar{y} = x^T \overline{(A^T y)} = x \cdot (\overline{A^T y}).$$

Dette karakteriserer " $\bar{A}^T$ " unikt, for om $x = e_j$, $y = e_k$, er da

$$(A)_{kj} = (Ax) \cdot y = x \cdot (\overline{A^T y}) = (\bar{A}^T)_{jk}.$$

Matrisen $\bar{A}^T$ er den konjugerttransponerte av A ; vi skriver

$$A^* := \bar{A}^T.$$

Vi har altså $(Ax) \cdot y = x \cdot (A^* y)$ $\forall x, y \in \mathbb{K}^n, y \in \mathbb{K}^m$

Teorem:

La U og V være endeligdim. ind. prod. rom, og
la $T \in \mathcal{L}(U, V)$. Da finnes $T^* \in \mathcal{L}(V, U)$
(den adjungerte til T) slik at

$$\langle Tu, v \rangle_V = \langle u, T^*v \rangle_U \quad \forall u \in U, v \in V.$$

Bewis:

Fikser $v \in V$; vi vil definere " T^*v ". Definer
 $S_v \in U' = \mathcal{L}(U, K)$ som

$$S_v u := \langle Tu, v \rangle_V, \quad \forall u \in U.$$

Av Riesz finnes da en unik $u_v \in U$ slik at
 $S_v u = \langle u, u_v \rangle_U \quad \forall u \in U$

Vi definerer $T^*v := u_v$. Da er T^* veldefinert
og lineær (oppg.!), og for $u \in U, v \in V$ er da

$$\langle u, T^*v \rangle_U = \langle u, u_v \rangle_U = S_v u = \langle Tu, v \rangle_V.$$



Oppg: $\langle v, Tu \rangle_V = \langle T^*v, u \rangle_U \quad \forall u, v.$

Prop.:

La U og V ha o.n. basiser $\mathcal{B}$ og $\mathcal{C}$, og la $T \in \mathcal{L}(U, V)$.

Da er $[T^*]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = ([T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}})^*$

(der istnevnte er konjugattransponert).

Basis:

Skriv $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ og $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_m)$. Av Teo. 4.3.8 er

$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \left(\langle Tu_k, v_j \rangle_v \right)_{jk}, \quad [T^*]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \left(\langle T^* v_k, u_j \rangle_u \right)_{jk},$$

$$\begin{aligned} \text{så} \quad [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} &= \left(\overline{\langle v_j, Tu_k \rangle_v} \right)_{jk} = \left(\overline{\langle v_k, Tu_j \rangle_v} \right)_{jk}^T \\ &= \left(\overline{\langle T^* v_k, u_j \rangle_u} \right)_{jk}^T = [T^*]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}. \end{aligned}$$

Hva sier den adjungerte?

Vi har sett at for en $u \in U$, kan " $\langle u, v \rangle$ " (for $v \in U$) ses på som en observasjon av u fra standpunktet til v .

I uttrykket $\langle Tu, v \rangle_v$ (for $T \in \mathcal{L}(U, V), u \in U, v \in V$) observerer vi altså hva T gjør med u , fra standpunktet til v .

Den adjungerte snur dette på hodet: T^* flytter stedet observatøren, slik at observasjonen (fra standpunktet til u) forblir det samme.

For eksempel: Vi observerer jorda fra månen.



u



v



u



v



Etter 6 timer har jorda rotert $\pi/2$ om sin egen akse: $u \rightsquigarrow Ru$ (R : rotasjon $\pi/2$).

Vi observerer da jorda: $\langle Ru, v \rangle$.

Vi hadde fått samme observasjon om vi roterte månen $\pi/2$ motsatt vei (om jordas akse):

$\langle u, R^* v \rangle$. Altså bør R^* være "roter motsatt vei".

Vi har f.eks. $R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, og

$$R^* = \bar{R}^T = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \\ = \text{"rotasjon motsatt vei"}$$

□

Prop. 4.7.6: La $T \in \mathcal{L}(U, V)$

(i) $\|T^*\|_{\mathcal{L}(V, U)} = \|T\|_{\mathcal{L}(U, V)}$

(ii) $(T^*)^* = T$

(iii) Om T er en isomorfi, er også T^* en isomorfi, og $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

(iv) Om $S \in \mathcal{L}(V, W)$, er $(ST)^* = T^*S^*$

(v) $\ker T^* = (\operatorname{im} T)^\perp$

(vi) $\operatorname{im} T^* = (\ker T)^\perp$

(vii) $\dim \operatorname{im} T = \dim \operatorname{im} T^*$

(viii) $\dim \ker T = \dim \ker T^*$.

Basis for (v) :

$$v \in \ker T^* \Leftrightarrow T^*v = 0 \Leftrightarrow \langle T^*v, u \rangle = 0 \quad \forall u \in U$$

$$\Leftrightarrow \langle v, Tu \rangle = 0 \quad \forall u \in U$$

$$\Leftrightarrow \langle v, w \rangle = 0 \quad \forall w \in \operatorname{im} T$$

$$\Leftrightarrow v \in (\operatorname{im} T)^\perp.$$

