

4.8-4.9 Normale og selvadjungerede operatorer

Vi l r n  U være et indreprodukt, og skal fra n 
 r studere operatorer på U , dvs. $T \in \mathcal{L}(U) := \mathcal{L}(U, U)$.
Husk at dette svarer til kvadratiske matriser (n r $\dim U < \infty$).

Def:

$T \in \mathcal{L}(U)$ er selvadjungeret om $T^* = T$.

En matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ er selvadjungeret om $A^* = A$.

-----"----- symmetrisk om $A^T = A$.

Merk: Om $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, er "selvadj." og "sym." det samme.

Def:

$T \in \mathcal{L}(U)$ er normal om $TT^* = T^*T$.

En matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ er normal om $AA^* = A^*A$.

Opgg:

- Alle kvadr. diagmatr. er selvadj.
- Alle selvadj. operatorer/matriser er normale
- Alle unitære operatorer/matriser (dvs. $T^{-1} = T^*$) er normale
- T normal $\Rightarrow \|Tu\| = \|T^*u\| \quad \forall u \in U$ (oplyg!)

Eks:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 3 & 0 & 5 \\ 8 & 5 & -4 \end{pmatrix} \text{ er symmetrisk, selvadjungeret og normal.}$$

□

Eks:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ er normal, men ikke symm/selvadj. :}$$

$$AA^* = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad A^*A = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

□

Eks:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 5 \end{pmatrix} \text{ er symmetrisk, men ikke normal/selvadjungeret.}$$

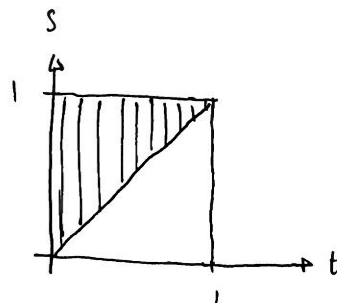
□

Eks:

$$\text{La } U := C^0([0,1], \mathbb{C}) \text{ med } L^2\text{-indreprod., og la } T \in \mathcal{L}(U),$$
$$(Tf)(t) := \int_0^t f(s) ds.$$

Da er

$$\begin{aligned} \langle Tf, g \rangle_{L^2} &= \int_0^1 \int_0^t f(s) ds \overline{g(t)} dt = \\ &= \int_0^1 \int_0^t f(s) \overline{g(t)} ds dt = \\ &= \int_0^1 \int_s^1 f(s) \overline{g(t)} dt ds = \\ &= \int_0^1 f(s) \left(\int_s^1 \overline{g(t)} dt \right) ds = \\ &= \langle f, Sg \rangle_{L^2}, \end{aligned}$$



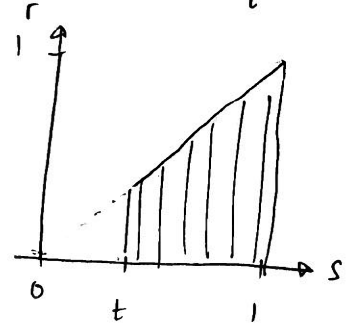
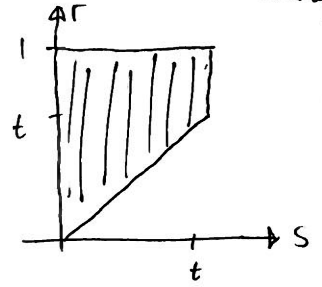
$$\text{der } Sg(t) := \int_s^1 g(t) dt.$$

Altså er $T^* = S$, og T er hverken symmetrisk eller selvadj.

Vi har

$$(TT^*f)(t) = \int_0^t \int_s^1 f(r) dr ds,$$

$$(T^*Tf)(t) = \int_t^1 \int_0^s f(r) dr ds$$



Dine er ikke like: Ta f.eks. $f \equiv 1$

$$(TT^*f)(t) = \int_0^t (1-s) ds = t - t^2/2,$$

$$(T^*Tf)(t) = \int_t^1 s ds = \frac{1-t^2}{2}.$$

Altså er T heller ikke normal.

□

Teorem 4.8.5

La T være normal. Da er:

(i) $\ker T = \ker T^*$

(ii) $\ker T = (\operatorname{im} T)^\perp$

(iii) $\operatorname{im} T = \operatorname{im} T^*$

(iv) $V = \operatorname{im} T \oplus \ker T$

(v) $T - \alpha \operatorname{id}$ er normal for alle $\alpha \in K$.

Bevis

(i) La $u \in \ker T$, så $Tu = 0$. Da er

$$0 = \|Tu\|^2 = \|T^*u\|,$$

så $T^*u = 0$, dvs. $u \in \ker T^*$.

(ii) Vi har

$$u \in (\operatorname{im} T)^\perp \Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0 \quad \forall v \in \operatorname{im} T$$

$$\Leftrightarrow \langle u, Tw \rangle = 0 \quad \forall w \in U$$

$$\Leftrightarrow \langle T^*u, w \rangle = 0 \quad \forall w \in U$$

$$\Leftrightarrow T^*u = 0$$

$$\Leftrightarrow u \in \ker T^*.$$

(iii)–(v): Opgaver.

4.10 Ortogonale matricer og unitære operatorer

Def:

En operator T på et indreproduktrom U er unitær om T er inverterbar og $T^* = T^{-1}$.

En matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ er unitær om A er inverterbar og $A^* = A^{-1}$.

_____ er ortogonal om $A^T = A^{-1}$.

Opg:

$A \in M_n(\mathbb{K})$ er ortogonal hvis søjlerne i A er ortonormale.

Eksempel:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ er ortogonal og unitar.}$$

□

Prop.: La $T \in \mathcal{L}(U)$ være unitar.

(i) T er normal

(ii) T^* og T^{-1} er unitære

(iii) $\|Tu\| = \|T^*u\| = \|T^{-1}u\| = \|u\| \quad \forall u \in U$

(iv) T , T^* og T^{-1} har operatornorm lik 1.

(v) $\forall S \in \mathcal{L}(W, U)$ og $R \in \mathcal{L}(U, V)$ er

$$\|TS\|_{\mathcal{L}} = \|S\|_{\mathcal{L}} \text{ og } \|RT\|_{\mathcal{L}} = \|R\|_{\mathcal{L}}.$$

Beweis: (i), (ii) og (iv) er oppgaver.

(iii): $\|Tu\|^2 = \langle Tu, Tu \rangle = \langle u, T^*Tu \rangle = \langle u, u \rangle = \|u\|^2.$

(v): $\|TS\|_{\mathcal{L}} := \sup_{v \neq 0} \frac{\|T(Sv)\|_U}{\|v\|_W} = \sup_{v \neq 0} \frac{\|Sv\|_U}{\|v\|_W} = \|S\|_{\mathcal{L}}$

og

$$\begin{aligned} \|RT\|_{\mathcal{L}} &:= \sup_{u \neq 0} \left\{ \frac{\|R(Tu)\|_V}{\|u\|_U} : u \in U, u \neq 0 \right\} \\ &= \sup \left\{ \frac{\|R\tilde{u}\|_V}{\|u\|_U} : u \in U, u \neq 0, \tilde{u} := Tu \right\} \\ &= \sup \left\{ \frac{\|R\tilde{u}\|_V}{\|\tilde{u}\|_V} : \text{---} \parallel \text{---} \right\} \\ &= \sup \left\{ \frac{\|R\tilde{u}\|_V}{\|\tilde{u}\|_V} : \tilde{u} \in U, \tilde{u} \neq 0 \right\} = \|R\|_{\mathcal{L}}. \end{aligned}$$

■

Oppg.: Om B og C er ~~kompleksmatr.~~ for ortonormale
 vektorer for U , er $[id]_C^B$ unitær.

Eksempel: Rotasjonsmatriser er unitære.

Eksempel:

En permutasjonsmatrise er en kvadratisk matrise med
 kun 0-er og 1-ere, og med nøyaktig én 1 i hver
 rad og hver kolonne. I $M_2(\mathbb{K})$ er

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

de eneste slike, mens i $M_3(\mathbb{K})$ er

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alle perm. matr.

Permutasjonsmatriser er unitære: Om $A = (u_1 \dots u_n)$, er

$$A^* = A^T = \begin{pmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{pmatrix}, \quad \text{og}$$

$$(A^*A)_{jk} = \sum_{l=1}^n (u_j)_l (u_k)_l.$$

Om $j \neq k$, har u_j og u_k ikke 1 på samme plass, så $(u_j)_l (u_k)_l = 0$
 $\forall l = 1, \dots, n$. Om $j = k$ er $(u_j)_l (u_k)_l = \delta_{jl}$, så

$$(A^*A)_{jk} = \delta_{jk}$$

□

(Obligatorisk om permutasjonsmatr.)

4.11 LU- og QR-faktorisering

En faktorisering av en matrise A består i å skrive A som et produkt av to (eller flere) matriser: $A = BC$.

Et formål er å løse ligninger, $Ax = b$:

1) finn løsningen til $Bx = b$

2) $\xrightarrow{\quad} Ax = y$.

Da er $Ax = BCx = Bx = b$.

Denne algoritmen er kun nyttig om systemene $Bx = b$, $Cx = y$ er mye lettere å løse enn $Ax = b$.

LU-faktorisering

Def: En øvre triangulær (eller nedre triangulær) matrise er en matrise A der $(A)_{jk} = 0 \quad \forall j > k$ (eller $j < k$).

Ekst: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

Def: En LU-faktorisering av en matrise A er på formen $A = LU$, der L er nedre triangulær og U øvre triang.

Eksempel:

La $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Vi gjør radreduksjon:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\cdot 3 \\ +}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\cdot -1 \\ +}}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} =: U.$$

Hver av radoperasjonene ovenfor kan skrives som en matrisemult.: $U = R_2 R_1 A$, der

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ +3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Faktaer: • Det Produktet av øvre triang. (eller nedre triang.) matriser er øvre triang. (nedre triang.)

• Om en matrise er invert. og ø.t. (eller n.t.),
er dens inverse n.t. (eller ø.t.).

Vi får $A = LU$, der $L := (R_2 R_1)^{-1} = R_1^{-1} R_2^{-1}$,
som er n.t.

Om vi er nødt til å "pivotere" - bytte om på rader -
får vi en "PLU" - dekomposisjon, der P er en permutasjonsmatr.

Systemer der matrisen er ~~en~~ triangulær, er lette at løse:

$$\text{Om } U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{og vil}$$

løse $Ux = b$, får vi

$$-2x_3 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x_3 = -1$$

$$5x_2 + 5 \cdot (-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = 1$$

$$x_1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 2$$

$$\text{så } \underline{x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}.$$

QR-faktoriserings

Def: En QR-faktoriserings af $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ er på formen
 $A = QR$, der $Q \in M_m(\mathbb{K})$ er unitær og $R \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$
er øvre triangulær.

Unitære matricer er matricer med ortonormale kolonner,
og disse møder vi i Gram-Schmidt-proceduren. Vi
formulerer denne for kolonnene $a_1, \dots, a_n$ i A :

$$v_k := \frac{1}{\|v_k'\|} v_k', \quad v_k' := a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle a_k, v_j \rangle v_j. \quad (k=1, \dots, n).$$

Påstand: $v_k' = \langle a_k, v_k \rangle v_k$.

Ta indreproduktet med v_k :

$$\langle V_k', V_k \rangle = \langle a_k, V_k \rangle - \sum_{j=1}^{k-1} \langle a_k, V_j \rangle \underbrace{\langle V_j, V_k \rangle}_{=0} = \langle a_k, V_k \rangle.$$

$$\Rightarrow V_k' = \|V_k'\| V_k = \langle V_k', V_k \rangle V_k = \langle a_k, V_k \rangle V_k.$$

Dermed er

$$\begin{aligned} a_k &= \sum_{j=1}^{k-1} \langle a_k, V_j \rangle V_j + \langle a_k, V_k \rangle V_k \\ &= \sum_{j=1}^k \langle a_k, V_j \rangle V_j. \end{aligned}$$

I matrixform kan dette skrives som

$$\underbrace{(a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n)}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} \langle a_1, V_1 \rangle & \langle a_1, V_2 \rangle & \dots & \langle a_1, V_m \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle a_n, V_1 \rangle & \langle a_n, V_2 \rangle & \dots & \langle a_n, V_m \rangle \end{pmatrix}}_Q \underbrace{\begin{pmatrix} \langle a_1, V_1 \rangle & \langle a_2, V_1 \rangle & \dots & \langle a_n, V_1 \rangle \\ 0 & \langle a_2, V_2 \rangle & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \langle a_n, V_m \rangle \end{pmatrix}}_R$$

Merk: Vi har antatt at $a_1, \dots, a_n$ er lineært uavhengige. Det finnes måter å unngå dette kravet.

QR-fakt. er nyttig av flere grunner, bl.a. å løse lineære systemer: Om $A = QR$ og vi vil løse $Ax = b$, trenger vi bare å løse systemene

$$Qy = b$$

(som har løsning $y = Q^* b$) og

$$Rx = y$$

(som er lett å løse siden R er triangular).