

5. Spektralteori

Spektralteori omhandler studien av egenverdier og -vektorene til kvadratiske matriser, og mer generelt, til lineære operatorer.

Eksempel:

La $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$. Vi vil finne alle tall λ og alle vektorer x slik at $Ax = \lambda x$. Om $x=0$ er dette opplagt oppfylt, så vi ser bort fra $x=0$. Da er

$$(A - \lambda I_2)x = 0,$$

så $x \in \ker(A - \lambda I_2)$. Altså må $A - \lambda I_2$ være singular, så determ. må være lik 0:

$$0 \stackrel{!}{=} \det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - 9\lambda + 8 - 8 = \lambda^2 - 9\lambda = \lambda(\lambda - 9)$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4(-8)}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{105}}{2} \approx 9,5 \text{ og } -0,5.$$

så $\lambda = 0$ eller 9 . For $\lambda_1 = 0$ får vi $Ax = 0$, som har løsning $x_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$. For $\lambda_2 = 9$ får vi $Ax_2 = 9x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x_2 = 0, \text{ som har løsning } x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Merk at $B = (x_1, x_2)$ er lin. uavh., så B er en basis for $\mathbb{R}^2$. For $x \in \mathbb{R}^2$ er derfor

$$Ax = A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$$

$$= \lambda_1 \alpha_1 x_1 + \lambda_2 \alpha_2 x_2$$

$$= (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} =$$

$$= (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} (x_1 \ x_2)^{-1} x$$

$$(\alpha_1, \alpha_2 \text{ n.a. } [x]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix})$$

□

5.1 Egenpar og egenrum

Def

La U være et vektorrum og la $T \in \mathcal{L}(U)$. Et eigenpar for T er et par $(\lambda, u) \in \mathbb{K} \times U$ (eigenverdi og eigenvektor) slike at $u \neq 0$ og $Tu = \lambda u$. Spekteret til T er $\sigma(T) := \{\text{alle eigenverdier til } T\}$.

Oppg 5.1.2: a) (λ, u) eigenpar $\Rightarrow (\lambda, \alpha u)$ eigenpar $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.
b) u, v egenvek. tilh. $\lambda \Rightarrow u+v$ egenvek. tilh. λ .

(λ, u) er et eigenpar hvis $Tu = \lambda u$, dvs. $(T - \lambda \text{id})u = 0$, dvs. $u \in \ker(T - \lambda \text{id})$. Altså er $\lambda \in \mathbb{K}$ en eigenverdi hvis $\ker(T - \lambda \text{id}) \neq \{0\}$.

Def: Om λ er en eigenverdi til $T \in \mathcal{L}(U)$, er det tilhørende eigenrommet $E_T(\lambda) := \ker(T - \lambda \text{id}) = \{u \in U : Tu = \lambda u\}$.

Merk: Om T har eigenverdier $\lambda_1 \neq \lambda_2$, og u_1, u_2 er tilhørende egenvek., må $u_1 \neq u_2$, for om $u_1 = u_2$, er $\lambda_1 u_1 = Tu_1 = Tu_2 = \lambda_2 u_2 = \lambda_2 u_1$, så $(\lambda_1 - \lambda_2)u_1 = 0$, og siden $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ må $u_1 = 0$.
Altså vil $E_T(\lambda_1) \cap E_T(\lambda_2) = \{0\}$. $\square$

Def: Om $\lambda \in \sigma(T)$, er $\gamma_T(\lambda) := \dim E_T(\lambda)$ den geometriske multiplisitet til λ .

5.2 Egenverdier på endeligdim. vektorrum

(08/16) Oppg 5.2.1: $T \in \mathcal{L}(U)$, U endeligdim.:
 T er en isomorfi $\Leftrightarrow 0 \notin \sigma(T)$.

Prop.

Oppg 5.2.2: La U endeligdim., $T \in \mathcal{L}(U)$, $\mathcal{B}$ en basis for U .
Da er (λ, u) et egenpar for T hvis $(\lambda, [u]_{\mathcal{B}})$ er
et egenpar for $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

Bewis: Oppg.

Def: La U endeligdim., $T \in \mathcal{L}(U)$, ~~$\lambda \in \mathbb{K}$~~ . Det
kar. pol. til λ er $p_T(\lambda) := \det(T - \lambda \text{id})$ ($\lambda \in \mathbb{K}$)
 $= \det([T - \lambda \text{id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}) = \det([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - \lambda I_n)$.

5.2.4

Prop: La $T \in \mathcal{L}(U)$, U endeligdim., $\lambda \in \mathbb{K}$. TFAE:

(i) $\lambda \in \sigma(T)$

(ii) λ er en rot av p_T .

Bewis: Oppg.

Def: Den algebraiske multiplisiteten til $\lambda \in \sigma(T)$ er
 $\mu_T(\lambda) :=$ multiplisiteten til roten λ av p_T .

Eksempel:

La $A := \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, rom for. Da er $p_T(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$,

og $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$, så $p_T(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$. Altså har
både 1 og 2 alg. mult. 1. Videre er

$E_T(1) = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $E_T(2) = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, så 1 og 2 har også geom. mult. 1. □

Eksempel:

La $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Da er $p_T(\lambda) = \lambda^2$, så $\sigma(T) = \{0\}$, og $\mu_T(0) = 2$. Vi har $Br = 0 \Leftrightarrow r = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, så $E_T(0) = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, og $j_T(0) = 1 < \mu_T(0)$.

5.2.1: Komplekse egenr.

Om $K = \mathbb{C}$, og $\dim(V) = n$, er p_T et n -tegrads pol. med komplekse koef., så af algebraens fund. teorem, findes $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ slik at

$$p_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n) \quad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

Skalaren λ_j forekommer $\mu_T(\lambda_j)$ gange i dette produkt. Når vi her "listen af egenverdier" mener vi $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

5.2.2 Reelle egenverdier

Om $K = \mathbb{R}$ kan vi fremdeles få komplekse "egenverdier":

Eks: La $A \in M_2(\mathbb{R})$, $A := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. Da er

$$\lambda_1 = \cos \theta - i \sin \theta, \quad \lambda_2 = \cos \theta + i \sin \theta,$$

som er komplekse (med mindre $\theta = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$). □

Prop. 5.2-9: La U være et endeligdim. indreproduktrom over $K = \mathbb{R}$ eller $K = \mathbb{C}$, og la $T \in \mathcal{L}(U)$ være selvadjungert. ~~Da~~ Da er alle røttene til p_T reelle.

Bewis:

- Om $K = \mathbb{C}$, vet vi at alle røtter av p_T også er egenverdier. La u være en egenvektor. Da er

$$\begin{aligned}\lambda \|u\|^2 &= \lambda \langle u, u \rangle = \langle \lambda u, u \rangle = \langle Tu, u \rangle \\ &= \langle u, T^* u \rangle = \langle u, Tu \rangle = \langle u, \lambda u \rangle \\ &= \bar{\lambda} \langle u, u \rangle = \bar{\lambda} \|u\|^2.\end{aligned}$$

Delt på $\|u\|^2$ og få $\lambda = \bar{\lambda}$.

- Om $K = \mathbb{R}$ lar vi B være en ^{ortonormal} basis for U og $A := [T]_B^B$.
La $S: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $Sx := Ax$. Da er $p_T = p_S$,
men p_S er selvadjungert, så røttene til p_S , og dermed p_T , er reelle. ◻

Eksempel:

$A := \begin{pmatrix} 2 & 3+7i \\ 3-7i & 5 \end{pmatrix}$ er selvadj. Vi har $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda - 48$,
som har røtter $\lambda = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 4 \cdot 48}}{2} \in \mathbb{R}$. ◻

5.3 Diagonalisering

Def:

En diagonalmatrise er en matrise som er null utekk
fra diagonalen. For $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ er ~~diag~~

$$\text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) := \sum_{j=1}^n (\delta_{jk} \alpha_j)_{j,k=1, \dots, n} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \alpha_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

For $p, q \in \mathbb{N}$ er $\text{diag}_{p \times q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in M_{p \times q}(\mathbb{K})$,

$$(\text{diag}_{p \times q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n))_{jk} = \begin{cases} \alpha_j & \text{om } j=k \leq n \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Def:

La U være n -dim. Da er $T \in \mathcal{L}(U)$ diagonaliserbar
om det finnes en basis $\mathcal{B}$ for U s.a. $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ er
en diagonalmatrise.

Eksempel:

$T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, $T(x) := Ax$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ er diagonaliserbar,
for om $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, er $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\square$

Prop: La U være n -dim. og $T \in \mathcal{L}(U)$. TFAE:

- (i) T er diagonaliserbar
- (ii) T har n lin. uavh. egenvektorer.

Videre: Om $\mathcal{B} := (u_1, \dots, u_n)$ er lin. uavh. egenvek. med
tilh. egenverdier $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, er da
 $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Beris:

I begge tilfeller er $B := (u_1, \dots, u_n)$ en basis, og $[u_j]_B = e_j \forall j$.

(i) $\Rightarrow$ (ii): La B være en basis n.a. $[T]_B^B = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ for $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$.

For $j=1, \dots, n$ er

$$[Tu_j]_B = [T]_B^B [u_j]_B = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) e_j = \lambda_j \cdot e_j = \lambda_j [u_j]_B.$$

Altså er $Tu_j = \lambda_j u_j$, så u_j er egenvek. tilh. λ_j .

(ii) $\Rightarrow$ (i):

La $B := (u_1, \dots, u_n)$. Da er

$$[T]_B^B e_j = [T]_B^B [u_j]_B = [Tu_j]_B = [\lambda_j u_j]_B = \lambda_j e_j,$$

så kolonne j i $[T]_B^B$ er $\lambda_j e_j$. ~~✗~~

Oppg 5.3.5: Om T er en op. på et n -dim. vektorrom med n forskjellige egenvekter, er T diagonaliserbar.

5.3.2 Diagonalisering av matriser

Def: $A \in M_n(\mathbb{K})$ er diagonaliserbar om $\exists$ inverterbar $R \in M_n(\mathbb{K})$ og diag. matr. $D \in M_n(\mathbb{K})$ s.d.

$$A = RDR^{-1}.$$

Denne fakt. er diagonaliseringen av A .

Prop. 5.3.8:

La $A \in M_n(\mathbb{K})$.

(i) A diagonaliserbar $\Leftrightarrow T(x) := Ax$ er diagonaliserbar

(ii) Om A er diag. bar og $A = RDR^{-1}$, er kolonnene i R egenvek. til A , og elementene i D de tilh. egenverdiene.

(iii) A er diag. bar $\Leftrightarrow A$ har n lin. uavh. egenvek.

Bewis:

(i) La $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$, slik at $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = A$.

" $\Rightarrow$ ": La $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$, kolonnene i R . Da er

$$[id]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = R, \quad [id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = R^{-1}, \quad \text{så}$$

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = R^{-1}AR = D.$$

" $\Leftarrow$ ": La $R := (u_1 \dots u_n)$, der $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$. Da er

$$A = [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = [id]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} [id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = R [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} R^{-1}.$$

5.4 Anvendelser af diagonalisering

En matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ er diagonaliserbar om det findes $R \in M_n(\mathbb{K})$ og $D \in M_n(\mathbb{K})$ en diagonalmatr. slikt at

$$A = RDR^{-1}.$$

Da er $A^2 = RDR^{-1}RDR^{-1} = RD^2R^{-1}$, og mere generelt,

$$A^k = RD^kR^{-1} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Om $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, blir $D^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$, så

$$A^k = R \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix} R^{-1}.$$

Med konventionen " $\lambda^0 = 1$ ", kan vi skrive " $A^0 = I_n$ ".

Vi kan formelt sætte $k = -1$, og få et udtryk for A^{-1} . Mer rigtigt:

$$A^{-1} = (RDR^{-1})^{-1} = (R^{-1})^{-1}D^{-1}R^{-1} = RD^{-1}R^{-1}.$$

Vi har $D^{-1} = \text{diag}(1/\lambda_1, \dots, 1/\lambda_n)$, som altså findes

hvis $\lambda_1, \dots, \lambda_n \neq 0$.

Demografi

La $x = \begin{pmatrix} \text{andel pop. i by} \\ \text{--- land} \end{pmatrix}$. Fra ett år til neste endrer:

"overgangsmatrise"

$$A = \begin{pmatrix} 0.99 & 0.03 \\ 0.01 & 0.97 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_{r+1} = Ax_r \\ x_0 = x \end{cases} \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

Om $x_r = A^r x$, vil x_r konvergere. (MATLAB)

$$V_1 \text{ f r } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0.96, \quad V_1 = \begin{pmatrix} 0.75 \\ 0.25 \end{pmatrix}, \quad V_2 \text{ f r } \lambda_2 = -1, \quad V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A^r = R D^r R^{-1} x$$

$$R = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.96 \end{pmatrix}$$

$$= V_1 \alpha_1 + V_2 \cdot 0.96^r \alpha_2$$

$$\xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} V_1 \alpha_1$$

A er en stokastisk matrise: $\sum_{j=1}^n (A)_{jk} = 1 \quad \forall k = 1, \dots, n$.

$$\text{Da er } \sum_{j=1}^n (Ax)_j = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_{jk} x_k = \dots = \sum_{k=1}^n x_k,$$

nei A bevarer kolonnenummer. Om x er en sannsynlighetsford.,

$$\sum_k x_k = 1, \quad x_k \geq 0, \quad \text{er også } Ax \text{ det.}$$