

## Kredittvurdering

Kredittvurderingsbyråer (Standard & Poor's, Moody, Finch)  
vurderer en låntagers evne/sannsynlighet for å betale tilbake  
et lån. Låntager rangeres på en skala (A/B/C/D).

Byråene estimerer hvert år sannsynligheten for å endre vurdering.  
Dette gir en overgangsmatrix  $P$ . (MATLAB)

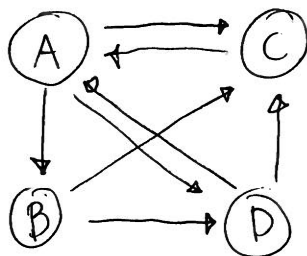
## Pagerank

Søkemotorer består av tre hovedkomponenter:

- 1) En crawler/spider som indekserer nye nettsider
- 2) Et databasestøk som finner alle indekserte nettsider som matcher søket
- 3) En rangeringsalgoritme som rangerer "treffene".

Pagerank er rangeringsalgoritmen som gjorde at Google vant "søkemotorkrigen" på 1990-2000-tallet.

Internett kan ses på som en gigantisk graf, der nettsidene er noder og lenker er rettede kanter:



Merk at A har 2 innkommende lenker, B 1, C 3 og D 2.

En enkel rangering vil si at C er mest populær, og dermed bør rangeres høyest.

Pagerank tenker seg en bruker som begynner på en vilkårlig nettside, og som trykker på en vilkårlig lenke på den nettsiden. Hvor lenge bruker hen på hver side i det lange løp?

Vi koder grafen som en overgangsmatrise:

$$P := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Den største egenverdien til P er 1, med egenvek.  $\approx \begin{pmatrix} 0.39 \\ 0.13 \\ 0.29 \\ 0.19 \end{pmatrix}$ .

Altså vil brukeren komme innom side A 39% av tiden.

Om B vil øke populariteten sin, kan de lage en side E som kun peker til den:

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dette vil ikke endre rangeringen av A, B, C, D!

## 5.5: Spektralteoremet

### Lemma

La  $U$  være et endeligdim. indreproduktrom over  $\mathbb{R}$  eller  $\mathbb{C}$ , og la  $T \in \mathcal{L}(U)$  være selvadjungert. Da er alle røttene til  $p_T$  reelle. Spesielt har  $T$  minst én reell egenverdi.

### Lemma:

La  $U$  være rom over  $\mathbb{C}$ , og la  $T \in \mathcal{L}(U)$  være normal. Om  $(\lambda, v)$  er et egenpar for  $T$ , er  $(\bar{\lambda}, v)$  et egenpar for  $T^*$ .

### Spektralteoremet (over $\mathbb{C}$ , for operatorer):

La  $U$  være et endeligdim. indreproduktrom over  $\mathbb{C}$ , og la  $n := \dim U$ , og la  $T \in \mathcal{L}(U)$  være normal. Da finnes en orthonormal basis  $B = (u_1, \dots, u_n)$  for  $U$  bestående av egenvektorer av  $T$ . Som en konsekvens kan vi skrive

$$Tu = \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle u, u_k \rangle u_k$$

$$\forall u \in U.$$

(egendekomposisjonen til  $T$ ).

### Beris:

La  $(\lambda_1, u_1)$  være et egenpar for  $T$ , og anta at  $\|u_1\| = 1$ .

La  $U_2 := \text{span}(u_1)^\perp = \{w \in U : \langle w, u_1 \rangle = 0\}$ . Vi påstår at  $Tw \in U_2 \forall w \in U_2$ , slik at  $T|_{U_2} \in \mathcal{L}(U_2)$ . Om  $w \in U_2$  er

$$\langle Tw, u_1 \rangle = \langle w, T^* u_1 \rangle = \langle w, \bar{\lambda}_1 u_1 \rangle = \bar{\lambda}_1 \langle w, u_1 \rangle = 0,$$

Alttså er  $T$  en normal operator på det  $(n-1)$ -dim.  
rommet  $U_2$ . Vi velger på samme måte en egenvektor  
 $u_2 \in U_2$  med lengde  $\|u_2\|=1$ , lar  $U_3 := \text{span}(u_1, u_2)^\perp$ ,  
og fortsetter slik.

Vi ender opp med en ortonormal liste  $(u_1, \dots, u_n)$  av egenvek.

Om  $u \in U$  er  $u = \sum_{k=1}^n \langle u, u_k \rangle u_k$ , så

$$Tu = \sum_{k=1}^n \langle u, u_k \rangle Tu_k = \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle u, u_k \rangle u_k.$$



Teorem (spektralteorem for operatorer, over  $\mathbb{R}$ )

La  $U$  være et endeligdim. indreproduktrom over  $\mathbb{R}$ ,  
og la  $T \in \mathcal{L}(U)$  være selvadjungert. Da finnes  
en ortonormal basis for  $U$  bestående av egenvek. av  $T$ .

Beweis:

$T$  har minst én reell egenvektor  $\lambda_1$ , så vi kan la  $u_1$   
i beviset ovenfor være den tilhørende egenvektoren. Vi  
fortsetter på denne måten.



### Spektralteorem (for <sup>matriser</sup>operatorer over $\mathbb{C}$ )

La  $A \in M_n(\mathbb{C})$  være normal. Da findes en unitær  $R \in M_n(\mathbb{C})$  og en diagonalmatrise  $D \in M_n(\mathbb{C})$  s.a.

$$A = RDR^*.$$

Kolonnene i  $R$  er egenvektorene til  $A$ , og diagonalen i  $D$  egenverdierne.

Basis:

$T(x) := Ax$  ligger i  $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$  og er normal, så  $\exists$  ortonormal liste  $(u_1, \dots, u_n)$  af egenvektorer s.a.

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{k=1}^n \lambda_k (x \cdot u_k) u_k = \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k \overline{u_k}^T x = \sum_{k=1}^n u_k \lambda_k (R^* x)_k \\ &\stackrel{D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}{=} \sum_{k=1}^n u_k (DR^* x)_k = RDR^* x. \end{aligned}$$

$R = (u_1 \dots u_n)$

Siden listen er ortonormal, er  $R$  unitær. ▀

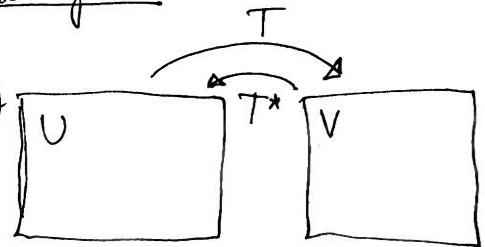
### Spektralteorem (for matriser over $\mathbb{R}$ )

La  $A \in M_n(\mathbb{R})$  være symmetrisk. Da findes en ortogonal  $R \in M_n(\mathbb{R})$  og en diagonalmatrise  $D \in M_n(\mathbb{R})$  slik at

$$A = RDR^T.$$

## 5.6 Singulærverdidekomposisjon

Vi vil nå generalisere diagonalisering til generelle  $T \in \mathcal{L}(U, V)$ .



For å benytte det vi allerede vet, studerer vi først Gram-operatoren  $T^*T$ , som er en lin. op. på  $U$ .

### 5.6.1 Gram-operatoren

#### Lemma

La  $U, V$  være endeligdim. indreproduktrom, og la  $T \in \mathcal{L}(U, V)$ .

Da er Gram-operatoren  $T^*T \in \mathcal{L}(U)$ :

- (i) selvadjungert
- (ii) positiv semidefinit (den har reelle, ikke-negative egenverdier)
- (iii) har samme kjerne som  $T$ , og samme bilde som  $T^*$ .

Beris: (i), (ii) er obligopp.

(iii) Om  $Tu = 0$  er også  $T^*Tu = 0$ , så  $\ker T^*T \supseteq \ker T$ .

Om  $T^*Tu = 0$ , er

$$\|Tu\|^2 = \langle Tu, Tu \rangle = \langle u, \underbrace{T^*Tu}_{=0} \rangle = 0,$$

så  $u \notin \ker Tu = 0$ .

For å se at  $\operatorname{im} T^*T = \operatorname{im} T$ , bruker vi tidligere resultater:

$$\operatorname{im} T^* = (\ker T)^\perp \quad (\text{Prop. 4.7.6 (vi)})$$

$$= (\ker T^*T)^\perp \quad (\text{av (iii), første del})$$

$$= (\operatorname{im} T^*T)^{\perp\perp} \quad (\text{Teo. 4.8.5 (ii), siden } T^*T \text{ er normal})$$

$$= \operatorname{im} T^*T \quad (\text{Prop. 4.5.7 (i), siden endeligdim.})$$



Oppg: Bervis tilsvarende egenskaper for  $TT^* \in \mathcal{L}(V)$ .

### 5.6.2 Singulærverdier

Vi har sett at  $T^*T$  er selvadj., så av spektralteoremet har  $V$  en orthonormal liste  $B = (u_1, \dots, u_n)$  av egenvektorer til  $T^*T$ , med tilhørende egenverdier  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ .

Vi har

$$\begin{aligned}\|Tu_k\|^2 &= \langle Tu_k, Tu_k \rangle = \langle u_k, T^*Tu_k \rangle = \langle u_k, \lambda_k u_k \rangle \\ &= \lambda_k \|u_k\|^2 = \lambda_k.\end{aligned}$$

Altså er  $\|Tu_k\| = \sqrt{\lambda_k}$ . Tallet  $\sqrt{\lambda_k}$  forteller oss dermed hvor mye  $T$  "strekker"  $u_k$ .

Def:

La  $U, V$  være endeligdim. indreproduktrom, og la  $T \in \mathcal{L}(U, V)$ .

Da er tallene  $\sigma_k := \sqrt{\lambda_k}$ ,  $k=1, \dots, n$ , singulærverdier

til  $T$  (der  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  er egenverdier til  $T^*T$ ).

Multiplisiteten til  $\sigma_k$  er den (algebraiske) mult.  $\mu_{T^*T}(\lambda_k)$ .

Vi ordner disse som  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$ , der hver sing.verd. gjentas  $\mu_{T^*T}(\lambda_k)$  antall ganger.

Def:

La  $A \in M_{m \times n}(K)$  (der  $K = \mathbb{R}$  eller  $\mathbb{C}$ ). Singularverdier til  $A$  er  $\sigma_k := \sqrt{\lambda_k}$ ,  $k=1, \dots, n$ , (der  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  er egenverdier til  $A^*A$ ).

Eksempel:

La  $A := \begin{pmatrix} 3i+2 & -5i \end{pmatrix}$ . Da er

$$A^*A = \begin{pmatrix} 13 & -15-10i \\ -15+10i & 25 \end{pmatrix}.$$

Vi får  $p_{A^*A}(\lambda) = \lambda^2 - 38\lambda$ , så  $\sigma_1 = \sqrt{38}$ ,  $\sigma_2 = 0$ .  
Mult. av hver ring.verd. er 1.  $\square$

Eksempel:

La  $A := \begin{pmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{pmatrix}$ . Da er  $A^*A = \begin{pmatrix} 80 & 100 & 40 \\ 100 & 170 & 140 \\ 40 & 140 & 200 \end{pmatrix}$ ,

og  $\sigma_1 = \sqrt{360}$ ,  $\sigma_2 = \sqrt{90}$ ,  $\sigma_3 = 0$ . Mult. av hver ring.verdi er 1.  $\square$

Oppgave: I disse eksemplene har  $A^*A$  og  $AA^*$  samme egenverdier (med unntak av 0). (oppg. for nistnevnte)

Prop: La  $U$  og  $V$  være endeligdim. indreprod. rom, og la  $T \in \mathcal{L}(U, V)$ .

(i)  $T$  er injektiv hvis og bare hvis 0 ikke er en ring.verdi

(ii)  $T$  er surjektiv hvis og bare hvis antall positive egen ring.verd. er lik dim  $V$

(iii) Antall ring.verd. som er lik 0, er lik dim ker  $T$

(iv) ——— " ——— positive, er lik dim im  $T$ .

Beweis: (iii) er en opg.

(iv): Av spektralteoremet er

$$T^*Tu = \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle u, u_k \rangle u_k,$$

så  $\text{im } T^*T$  spænnes af de  $u_k$ 'ene der  $\lambda_k \neq 0$ . Altså er  $\dim \text{im } T^*T = (\# \text{ ikke-nul } \lambda_k) = (\# \text{ positive eig. verd.})$ .

Men  $\text{im } T^*T = \text{im } T^*$ , som (av Prop. 4.7.6(vii)) har lige dimension som  $\text{im } T$ .

(i)  $T$  er injektiv  $\Leftrightarrow \ker T = \{0\}$

$$\Leftrightarrow \dim \ker T = 0$$

$$\Leftrightarrow (\# \text{ eig. verd. lik } 0) = 0 \quad (\text{av (iii)})$$

(ii)  $T$  er surjektiv  $\Leftrightarrow \text{im } T = V$

$$\Leftrightarrow \dim \text{im } T = \dim V$$

$$\Leftrightarrow (\# \text{ positive eig. verd.}) = \dim V$$

(av (iv)).

