

Løsningsforslag til oblig 1

MAT1125, høst 2026

Ulrik Skre Fjordholm

21. august 2026

Løsning på oppgave 1.4.2. Fra Oppgave 1.3.4 vet vi at $(e_1, \dots, e_n)$ er lineært uavhengig. For å se at listen spenner $\mathbb{K}^n$ lar vi $x = (x_k)_{k=1}^n \in \mathbb{K}^n$ være vilkårlig, og observerer at

$$x = \sum_{j=1}^n x_j e_j.$$

Altså ligger x i spennet til listen, og siden x var vilkårlig, spenner listen hele $\mathbb{K}^n$. $\square$

Løsning på oppgave 1.4.5.

(a) For $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ kan vi skrive

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n,$$

så $[x]_{\mathcal{E}} = x$.

(b) Vi har $f_j = \sum_{k=1}^n \delta_{jk} f_k$, så $[f_j]_{\mathcal{B}} = (\delta_{jk})_{k=1}^n = e_j$.

$\square$

Løsning på oppgave 1.4.9.

(a) I Oppgave 1.4.2 så vi at $(e_1, \dots, e_n)$ er en basis for $\mathbb{K}^n$. Siden denne listen inneholder n vektorer, blir $\dim \mathbb{K}^n = n$.

(b) La E_{ij} være matrisen med komponenter $E_{ij} := (\delta_{ik} \delta_{jl})_{k=1, \dots, m, l=1, \dots, n}$, altså matrisen med 1 i element (i, j) og 0 ellers. Da er $(E_{ij})_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n}$ (altså listen av alle disse matrisene) en basis for $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ (beviset er som i forrige oppgave), og siden det er mn basismatriser, blir dimensjonen mn .

$\square$

Løsning på oppgave 1.5.2.

(a) Dimensjonen til et vektorrom er antall elementer i en basis, og siden $(p_0, \dots, p_n)$ inneholder $n + 1$ elementer, får vi $\dim \mathcal{P}_n = n + 1$.

(b) Siden $\mathcal{P}_n$ er et underrom av $\mathcal{P}$, vil $\dim \mathcal{P} \geq \dim \mathcal{P}_n = n + 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Dermed må $\dim \mathcal{P} = \infty$.

(c) Løses på samme måte.

□

Løsning på oppgave 1.7.7.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Vi påstår at det for enhver $n \in \mathbb{N}$ finnes en lineært uavhengig liste $(u_1, \dots, u_n)$ i U . Siden U er uendeligdimensjonalt finnes minst én ikke-null vektor i U ; kall denne for u_1 . Anta så at vi har funnet vektorer $u_1, \dots, u_n$ slik at $\mathcal{B}_n := (u_1, \dots, u_n)$ er lineært uavhengig. Om $\text{span } \mathcal{B}_n = U$, er $\dim U = n$ — en selvmotsigelse — så det må finnes en $u_{n+1} \in U \setminus \text{span } \mathcal{B}_n$, og da er $(u_1, \dots, u_{n+1})$. Dette beviser påstanden.

Beviset fullføres nå ved å observere at $U_n := \text{span}(u_1, \dots, u_n)$ er et underrom av U med dimensjon n .

(ii) $\Rightarrow$ (i) Av Proposisjon 1.4.10 er $n = \dim U_n \leq \dim U$ for enhver $n \in \mathbb{N}$. Da må nødvendigvis $\dim U = \infty$.

□