Løsningsforslag til oblig 1
MAT1125, høst 2026

Ulrik Skre Fjordholm

15. september 2026

Løsning på oppgave 2.5.2. La U og V være n-dimensjonale vektorrom over $\mathbb{K}$. Av Teorem 2.5.1 finnes isomorfier $S: U \to \mathbb{K}^n$ og $T: V \to \mathbb{K}^n$. Da er $\varphi := T^{-1} \circ S$ en isomorfi fra U til V, slik at $U \cong V$.

(Avbildningen φ er veldefinert fordi T^{-1} eksisterer og avbilder $\mathbb{K}^n$ til V; den er lineær fordi komposisjonen av lineære avbildninger er lineær; og den er bijektiv fordi S og T^{-1} er bijektive, og komposisjonen mellom bijektive funksjoner er bijektiv.) □

Løsning på oppgave 2.5.3. Vi kan skrive

$$p(t) = 2 - t + 3t^2 = 2p_0(t) + (-1)p_1(t) + 3p_2(t),$$

så $[p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Vi har $q_0(t) = 1$, $q_1(t) = (t-0) = t$ og $q_2(t) = t(t-1) = t^2 - t$. Vi forsøker å "snike inn" q_2 i uttrykket for p, deretter q_1, og til sist q_0:

$$\begin{aligned} p(t) = 2 - t + 3t^2 &= 2 - t + 3\big(\underbrace{(t^2 - t)}_{=q_2(t)} + t\big) \\ &= 2 - t + 3\big(q_2(t) + t\big) = 2 + 2t + 3q_2(t) \\ &= 2q_0(t) + 2q_1(t) + 3q_2(t). \end{aligned}$$

Altså er $[p]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. □

Løsning på oppgave 2.5.6. Av Oppgave 1.4.5 vet vi at om $x \in \mathbb{K}^n$ og $y \in \mathbb{K}^m$, er $[x]_{\mathcal{B}} = x$ og $[y]_{\mathcal{C}} = y$. Dermed er

$$Ax = [Ax]_{\mathcal{C}} = [Tx]_{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}[x]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} x.$$

Siden dette gjelder for alle $x \in \mathbb{K}^n$, må nødvendigvis $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = A$. □

Løsning på oppgave 2.5.9. La $n := \dim U = \dim V$. Funksjonen T er en isomorfi hvis og bare hvis det finnes en $T^{-1} \in \mathcal{L}(V, U)$ slik at $T^{-1} \circ T = \mathrm{id}_U$ og $T \circ T^{-1} = \mathrm{id}_V$. Av Proposisjon 2.5.8 er da

$$I_n = [\mathrm{id}_U]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [T^{-1} \circ T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [T^{-1}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$$

og

$$I_n = [\mathrm{id}_V]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}} = [T \circ T^{-1}]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}} = [T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}[T^{-1}]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}$$

Altså er $[T^{-1}]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}$ en inversmatrise av $[T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}$, så $[T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}$ er inverterbar.

Motsatt, om $[T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}$ er inverterbar har den en inversmatrise $A \in M_n(\mathbb{K})$. Definer $S\colon V \to U$ som $Sv := A[v]_{\mathscr{C}}$. På samme måte som over ser man da at

$$I_n = [S \circ T]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}} = [T \circ S]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}}.$$

Altså er $S \circ T = \mathrm{id}_U$ og $T \circ S = \mathrm{id}_V$, så $S = T^{-1}$. □

Løsning på oppgave 2.6.4. Av Oppgave 2.6.3 er

$$[\mathrm{id}]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dermed er

$$[\mathrm{id}]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}} = \left([\mathrm{id}]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}\right)^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Løsning på oppgave 2.8.5. Merk først at $q_0(t) = 1$, $q_1(t) = t$ og $q_2(t) = t(t-1)$.

Vi finner først $[\mathrm{id}]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}$. Om $p = \alpha_0 q_0 + \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2$ er et vilkårlig polynom uttrykt i Newton-basisen, er

$$\begin{aligned} p(t) &= \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t(t-1) = \alpha_0 + (\alpha_1 - \alpha_2)t + \alpha_2 t^2 \\ &= \alpha_0 p_0(t) + (\alpha_1 - \alpha_2) p_1(t) + \alpha_2 p_2(t). \end{aligned}$$

Dersom $[p]_{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$, er altså $[p]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$. For at $[p]_{\mathscr{B}} = [\mathrm{id}]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}[p]_{\mathscr{C}}$, må da nødvendigvis

$$[\mathrm{id}]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dermed er

$$[\mathrm{id}]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} = \left([\mathrm{id}]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Løsning på oppgave 2.8.6.

(**a**) For en vilkårlig k er

$$\frac{dp_k}{dt}(t) = \frac{d}{dt}(t^k) = k\,t^{k-1} = k p_{k-1}(t).$$

Dermed er

$$Tp_0 = 0, \quad Tp_1 = p_0, \quad Tp_2 = 2p_1, \quad Tp_3 = 3p_2.$$

Hver av disse vektorene i $\mathscr{P}_2$ har basisrepresentasjon

$$[Tp_0]_{\mathscr{C}} = 0, \quad [Tp_1]_{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [Tp_2]_{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [Tp_3]_{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Vi får dermed basisrepresentasjonen

$$[T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(**b**) Om $\mathscr{B} = (p_0, \ldots, p_n)$ og $\mathscr{C} = (p_0, \ldots, p_{n-1})$, får vi som før $Tp_k = kp_{k-1}$ for $k = 0, \ldots, n$. Dermed er

$$[Tp_0]_{\mathscr{C}} = 0, \qquad [Tp_k]_{\mathscr{C}} = ke_k \qquad \forall\, k = 1, \ldots, n$$

(der $e_1, \ldots, e_n$ er standardbasisen i $\mathbb{R}^n$; se Seksjon 0.2.8). Vi får da

$$[T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix} \in M_{n\times(n+1)}(\mathbb{R}).$$

□