Løsningsforslag til oblig 1
MAT1125, høst 2026

Ulrik Skre Fjordholm

15. september 2026

Løsning på oppgave 3.7.8. La $M \coloneqq \max_j |(A)_{jj}|$, og la k være slik at $|(A)_{kk}| = M$. For $x \in \mathbb{K}^n$ har vi

$$(Ax)_j = \sum_{\ell=1}^{n} (A)_{j\ell} x_\ell = (A)_{jj} x_j,$$

så

$$\|Ax\|_2 = \sqrt{\textstyle\sum_{j=1}^n |(A)_{jj}|^2 |x_j|^2} \leqslant \sqrt{\textstyle\sum_{j=1}^n |(A)_{kk}|^2 |x_j|^2} = M\|x\|_2.$$

Dermed er $\|A\|_{\mathscr{L}} \leqslant M$. Dersom nå $x = (\dots, 0, 1, 0, \dots)^\mathsf{T}$, der 1-eren er på plass k, er

$$Ax = Mx,$$

så $\|A\|_{\mathscr{L}} \geqslant \|Ax\|_2 / \|x\|_2 = M$. Altså er $\|A\|_{\mathscr{L}} = M$. □

Løsning på oppgave 4.1.2.

(**a**)
$$\langle u, v + w\rangle = \overline{\langle v + w, u\rangle} = \overline{\langle v, u\rangle + \langle w, u\rangle} = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle.$$

(**b**)
$$\langle u, \alpha v\rangle = \overline{\langle \alpha v, u\rangle} = \overline{\alpha \langle v, u\rangle} = \overline{\alpha}\langle u, v\rangle.$$

(**c**) Ethvert reelt tall er lik sin egen komplekskonjugert. Siden $\langle u, v\rangle \in \mathbb{R}$ for alle $u, v \in U$ når kroppen er $\mathbb{R}$, er dermed

$$\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle} = \langle v, u\rangle.$$

□

Løsning på oppgave 4.1.3. Anta at $u \in U$ er slik at $\langle u, v\rangle = 0$ for alle $v \in U$. Setter vi $v = u$ får vi $\langle u, u\rangle = 0$. Men ifølge Definisjon 4.1.1 *(i)*, skjer dette kun når $u = 0$.

Ja, det samme er sant dersom $\langle v, u\rangle = 0$ for alle $v \in U$, for da er

$$0 = \overline{0} = \overline{\langle v, u\rangle} = \langle u, v\rangle \qquad \forall\, v \in U,$$

så $u = 0$, av det vi nettopp har vist. □

Løsning på oppgave 4.1.5.

(**a**) For alle $x \in \mathbb{K}^n$ er

$$\langle x, x\rangle_{\mathbb{K}^n} = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{x_j} = \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2,$$

som aldri er negativt, og er lik 0 hvis og bare hvis $x_1, \ldots, x_n = 0$. For $x, y, z \in \mathbb{K}^n$ er

$$\langle x + y, z\rangle_{\mathbb{K}^n} = \sum_{j=1}^{n} (x+y)_j \overline{z_j} = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{z_j} + \sum_{j=1}^{n} y_j \overline{z_j} = \langle x, z\rangle_{\mathbb{K}^n} + \langle y, z\rangle_{\mathbb{K}^n}.$$

For enhver $\alpha \in \mathbb{K}$ og $x, y \in \mathbb{K}^n$ er

$$\langle \alpha x, y\rangle_{\mathbb{K}^n} = \sum_{j=1}^{n} (\alpha x)_j \overline{y_j} = \alpha \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j} = \alpha \langle x, y\rangle_{\mathbb{K}^n}.$$

Og til slutt, om $x, y \in \mathbb{K}^n$, er

$$\langle x, y\rangle_{\mathbb{K}^n} = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j} = \sum_{j=1}^{n} \overline{\overline{x_j} y_j} = \overline{\sum_{j=1}^{n} y_j \overline{x_j}} = \overline{\langle y, x\rangle_{\mathbb{K}^n}}.$$

(**b**) Beviset ligner på det i forrige oppgave, men man må bruke at A er selvadjungert og positiv definitt.

For alle $x \in A$ er

$$\langle x, x\rangle_A = x \cdot (A\overline{x}) \geqslant 0$$

siden A er positiv definitt, og $\langle x, x\rangle_A = 0$ kun dersom $x = 0$, igjen fordi A er positiv definitt. For $x, y, z \in \mathbb{K}^n$ er

$$\langle x + y, z\rangle_A = (x+y) \cdot (A\overline{z}) = x \cdot (A\overline{z}) + y \cdot (A\overline{z}) = \langle x, z\rangle_A + \langle y, z\rangle_A.$$

For enhver $\alpha \in \mathbb{K}$ og $x, y \in \mathbb{K}^n$ er

$$\langle \alpha x, y\rangle_A = (\alpha x) \cdot (A\overline{y}) = \alpha\big(x \cdot (A\overline{y})\big) = \alpha \langle x, y\rangle_A.$$

Og til slutt, om $x, y \in \mathbb{K}^n$, er

$$\langle x, y\rangle_A = x \cdot (A\overline{y}) = (A\overline{y}) \cdot x = (A\overline{y})^{\mathsf{T}} x = \overline{y}^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}} x = \overline{y^{\mathsf{T}} \overline{A}^{\mathsf{T}} \overline{x}}$$
$$\overset{A \text{ er selvadjungert}}{=} \overline{y^{\mathsf{T}} A \overline{x}} = y \cdot (A\overline{x}) = \overline{\langle y, x\rangle_A}.$$

(**c**) Vi påstår først at rekken i definisjonen konvergerer. Rekken er absolutt konvergent fordi

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k \overline{b_k}| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|^2}{2} + \frac{|b_k|^2}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b_k|^2}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\|a\|_{\ell^2}^2 + \frac{1}{2}\|b\|_{\ell^2}^2 < \infty,$$

der vi i første steg har brukt Youngs ulikhet (se Appendiks B).

For enhver $a \in \ell^2(\mathbb{K})$ er

$$\langle a, a\rangle_{\ell^2} = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2,$$

som aldri er negativt, og som er lik 0 kun dersom $a_1, a_2, \cdots = 0$. For $a, b, c \in \ell^2(\mathbb{K})$ er

$$\langle a+b, c\rangle_{\ell^2} = \sum_{j=1}^{\infty} (a+b)_j \overline{c_j} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \overline{c_j} + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \overline{c_j} = \langle a, c\rangle_{\ell^2} + \langle y, z\rangle_{\ell^2}.$$

For enhver $\alpha \in \mathbb{K}$ og $a, b \in \ell^2(\mathbb{K})$ er

$$\langle \alpha a, b\rangle_{\ell^2} = \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha a)_j \overline{b_j} = \alpha \sum_{j=1}^{\infty} a_j \overline{b_j} = \alpha \langle x, y\rangle_{\ell^2}.$$

Og til slutt, om $a, b \in \ell^2(\mathbb{K})$, er

$$\langle a, b\rangle_{\ell^2} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \overline{b_j} = \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\overline{a_j} b_j} = \overline{\sum_{j=1}^{\infty} b_j \overline{a_j}} = \overline{\langle b, a\rangle_{\ell^2}}.$$

(**d**) Dette indreproduktet er veldefinert fordi $f\overline{g}$ er en kontinuerlig funksjon og $[a, b]$ er et begrenset intervall, så Riemann-integralet konvergerer.

For enhver $f \in C([a, b], \mathbb{K})$ er

$$\langle f, f\rangle_{L^2} = \int_a^b |f(t)|^2 \, dt,$$

som aldri er negativt. Dersom dette uttrykket er lik 0 må nødvendigvis $f(t) = 0$ for alle $t \in [a, b]$, som viser at $f = 0$. For alle $f, g, h \in C([a, b], \mathbb{K})$ er

$$\begin{aligned}\langle f+g, h\rangle_{L^2} &= \int_a^b (f+g)(t)\overline{h(t)} \, dt = \int_a^b f(t)\overline{h(t)} \, dt + \int_a^b g(t)\overline{h(t)} \, dt \\ &= \langle f, h\rangle_{L^2} + \langle g, h\rangle_{L^2}.\end{aligned}$$

For enhver $f, g \in C([a, b], \mathbb{K})$ og $\alpha \in \mathbb{K}$ er

$$\langle \alpha f, g\rangle_{L^2} = \int_a^b (\alpha f)(t)\overline{g(t)} \, dt = \alpha \int_a^b f(t)\overline{g(t)} \, dt = \alpha \langle f, g\rangle_{L^2}.$$

Til slutt, for alle $f, g \in C([a, b], \mathbb{K})$ er

$$\langle f, g\rangle_{L^2} = \int_a^b \overline{\overline{f(t)} g(t)} \, dt = \overline{\int_a^b g(t)\overline{f(t)} \, dt} = \overline{\langle g, f\rangle_{L^2}}.$$

□

Løsning på oppgave 4.2.2. For enhver funksjon f, er

$$\langle f, f\rangle_{L^2} = \int_a^b f(t)\overline{f(t)} \, dt = \int_a^b |f(t)|^2 \, dt = \|f\|_{L^2}^2,$$

så $\|f\|_{L^2} = \sqrt{\langle f, f\rangle_{L^2}}$, som vi ville vise. □

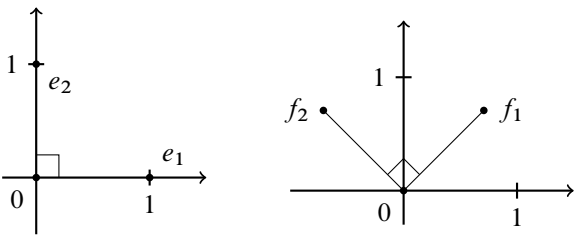
Løsning på oppgave 4.3.2. La e_1, e_2 betegne vektorene i listen $\mathcal{B}$ og (f_1, f_2) i $\mathcal{C}$. Da er

$$\langle e_1, e_2\rangle = 1\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0, \quad \langle e_1, e_1\rangle = 1^2 + 0^2 = 1, \quad \langle e_2, e_2\rangle = 0^2 + 1^2 = 1.$$

Altså er $\mathcal{B}$ ortonormal. Videre er

$$\langle f_1, f_2\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\tfrac{1}{\sqrt{2}} = 0, \quad \langle f_1, f_1\rangle = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1,$$
$$\langle f_2, f_2\rangle = \left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1,$$

så $\mathcal{C}$ er ortonormal.



Som figuren viser, er henholdsvis e_1, e_2 og f_1, f_2 ortogonale, og alle vektorene har lengde 1. □

Løsning på oppgave 4.3.3. Anta at $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ er skalarer slik at

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k = 0.$$

Tar vi indreproduktet med en vilkårlig vektor e_j, får vi

$$0 = \left\langle \textstyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, e_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle e_k, e_j\rangle = \alpha_j \langle e_j, e_j\rangle,$$

og siden $e_j \neq 0$, må $\alpha_j = 0$. Dette gjelder for alle j. Vi konkluderer med at listen er lineært uavhengig. □