

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT1125 — Videregående lineær algebra

Eksamensdag: 21. januar 2026

Tid for eksamen: 15:00 – 19:00

Oppgavesettet er på 7 sider.

Vedlegg: Ingen

Tillatte hjelpemidler: Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Merk: Høyeste mulige poengsum er 100 poeng.

Problem 1 (40 poeng)

For en $n \in \mathbb{N}$ lar vi $\mathcal{P}_n := \{\text{alle reelle polynomer av grad høyst } n\}$. La $S: \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_3$ være definert ved

$$Sp(t) := \int_1^t p(s) ds \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

for $p \in \mathcal{P}_2$. (For $t < 1$ tolker vi uttrykket $\int_1^t p(s) ds$ som $-\int_t^1 p(s) ds$, som vanlig.)

1a

Vis at S er en veldefinert lineær avbildning fra $\mathcal{P}_2$ til $\mathcal{P}_3$.

1b

La $p_0, p_1, \dots$ være standardbasispolynomene $p_0(t) := 1$, $p_k(t) := t^k$ for $t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. La

$$\mathcal{B} := (p_0, p_1, p_2) \quad \text{og} \quad \mathcal{C} := (p_0, p_1, p_2, p_3)$$

være standardbasisene for $\mathcal{P}_2$ og $\mathcal{P}_3$. (Du trenger ikke å vise at disse er basiser.) Finn basisrepresentasjonen $[S]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ av S .

1c

Bruk basisrepresentasjonen til å finne Sp når $p(t) = 5 - 2t + 3t^2$.

1d

Vis at $\dim \operatorname{im} S = 3$. Er S surjektiv?

(Fortsettes på side 2.)

1eFinn dimensjonen til kjernen til S . Er S injektiv?**Løsning:****1a (10 poeng)**

Siden alle $p \in \mathcal{P}_2$ er polynomer, er de kontinuerlige, så integralet av p over et vilkårlig begrenset intervall er veldefinert. Siden den antideriverte av et polynom av grad høyst 2 er et polynom av grad høyst 3, vil $Sp \in \mathcal{P}_3$. Altså er S en veldefinert avbildning fra $\mathcal{P}_2$ til $\mathcal{P}_3$.

For å se at S er lineær, lar vi $\alpha \in \mathbb{R}$ og $p, q \in \mathcal{P}_2$ og får for alle $t \in \mathbb{R}$ at

$$\begin{aligned} S(p+q)(t) &= \int_1^t p(t) + q(t) dt = \int_1^t p(t) dt + \int_1^t q(t) dt \\ &= S(p)(t) + S(q)(t), \end{aligned}$$

så $S(p+q) = Sp + Sq$, og

$$S(\alpha p)(t) = \int_1^t \alpha p(t) dt = \alpha \int_1^t p(t) dt = \alpha(Sp)(t),$$

så $S(\alpha p) = \alpha Sp$.

1b (10 poeng)

Vi har $[S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = ([Sp_0]_{\mathcal{B}} \quad [Sp_1]_{\mathcal{B}} \quad [Sp_2]_{\mathcal{B}})$. Vi regner ut Sp_k :

$$Sp_0(t) = \int_1^t 1 ds = t - 1 \quad \implies \quad [Sp_0]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$Sp_1(t) = \int_1^t s ds = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2} \quad \implies \quad [Sp_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$Sp_2(t) = \int_1^t s^2 dt = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3} \quad \implies \quad [Sp_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Altså er

$$[S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & -1/3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

(Fortsettes på side 3.)

1c (10 poeng)

Siden $[Sp]_{\mathcal{B}} = [S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}[p]_{\mathcal{B}}$, og $[p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, får vi

$$[Sp]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & -1/3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

som svarer til polynomet

$$Sp(t) = -5p_0(t) + 5p_1(t) - p_2(t) + p_3(t) = -5 + 5t - t^2 + t^3.$$

1d (5 poeng)

Dimensjonen til bildet til S er lik rangen til basisrepresentasjonen til S , altså antall lineært uavhengige kolonner i matrisen. Siden de tre kolonnene i basisrepresentasjonen er lineært uavhengige, vil $\dim \operatorname{im} S = 3$.

Vi har $\dim \operatorname{im} S = 3 < 4 = \dim \mathcal{P}_3$, så $\operatorname{im} S \neq \mathcal{P}_3$. Altså er S ikke surjektiv.

1e (5 poeng)

Av dimensjonssatsen er

$$\dim \ker S = \dim \mathcal{P}_2 - \dim \operatorname{im} S = 3 - 3 = 0.$$

Ja, S er injektiv, fordi kjernen har dimensjon 0.

Problem 2 (10 poeng)

La U være et indreproduktrom med ortonormal basis $(u_1, \dots, u_n)$, og la $\|\cdot\|$ være normen induisert av indreproduktet. Bevis at

$$\|u\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |\langle u, u_k \rangle|^2} \quad \forall u \in U.$$

Løsning: Når $(u_1, \dots, u_n)$ er en ortonormal basis for U , vet vi at alle $u \in U$ kan skrives som

$$u = \sum_{k=1}^n \langle u, u_k \rangle u_k.$$

Dermed er

$$\begin{aligned}\|u\|^2 &= \langle u, u \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n \langle u, u_k \rangle u_k, \sum_{j=1}^n \langle u, u_j \rangle u_j \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \langle u, u_k \rangle \overline{\langle u, u_j \rangle} \underbrace{\langle u_k, u_j \rangle}_{=\delta_{kj}} \\ &= \sum_{k=1}^n \langle u, u_k \rangle \overline{\langle u, u_k \rangle} = \sum_{k=1}^n |\langle u, u_k \rangle|^2.\end{aligned}$$

Problem 3 (30 poeng)

La $U := C^0([0, 1], \mathbb{R})$, mengden av kontinuerlige funksjoner fra $[0, 1]$ til $\mathbb{R}$.

3a

Definer $\|f\|_{L^1} := \int_0^1 |f(t)| dt$ for $f \in U$. Vis at $\|\cdot\|_{L^1}$ er en norm på U .

3b

Definer $R: U \rightarrow U$ ved $(Rf)(t) := (2+t)f(t)$ for alle $t \in [0, 1]$. Vis at R er veldefinert og lineær.

3c

Vis at R er kontinuerlig (med hensyn på normen $\|\cdot\|_{L^1}$).

Løsning:

3a (10 poeng)

Når f er kontinuerlig, er også $|f|$ kontinuerlig, og (Riemann-)integralet av en kontinuerlig funksjon over et begrenset intervall er veldefinert. Altså er $\|f\|_{L^1}$ veldefinert. Siden integralet av en ikke-negativ funksjon er ikke-negativt, er $\|f\|_{L^1} \geq 0$.

Om $\|f\|_{L^1} = 0$, er $\int_0^1 |f(t)| dt = 0$, så $f(t) = 0$ for alle t , det vil si $f = 0$.

For $\alpha \in \mathbb{R}$ er

$$\|\alpha f\|_{L^1} = \int_0^1 |\alpha f(t)| dt = |\alpha| \int_0^1 |f(t)| dt = |\alpha| \|f\|_{L^1}.$$

For $f, g \in U$ er

$$\begin{aligned}\|f + g\|_{L^1} &= \int_0^1 |f(t) + g(t)| dt \leq \int_0^1 |f(t)| + |g(t)| dt \\ &= \int_0^1 |f(t)| dt + \int_0^1 |g(t)| dt = \|f\|_{L^1} + \|g\|_{L^1}.\end{aligned}$$

Vi har dermed vist at $\|\cdot\|_{L^1}$ er en norm på U .

(Fortsettes på side 5.)

3b (10 poeng)

Når f er en kontinuerlig funksjon, er også funksjonen $t \mapsto (2+t)f(t)$ kontinuerlig, så $Rf \in U$. Altså er R veldefinert. For $f, g \in U$ og $\alpha \in \mathbb{R}$ er

$$\begin{aligned} R(f+g)(t) &= (2+t)(f(t)+g(t)) = (2+t)f(t) + (2+t)g(t) \\ &= R(f)(t) + R(g)(t), \end{aligned}$$

så $R(f+g) = Rf + Rg$, og

$$R(\alpha f)(t) = (2+t)(\alpha f(t)) = \alpha(2+t)f(t) = \alpha R(f)(t),$$

så $R(\alpha f) = \alpha R(f)$. Altså er R lineær.

3c (10 poeng)

For å vise at R er kontinuerlig, holder det å vise at det finnes en $C > 0$ slik at $\|Rf\|_{L^1} \leq C \|f\|_{L^1}$ for alle $f \in U$. Vi har

$$\begin{aligned} \|Rf\|_{L^1} &= \int_0^1 |(2+t)f(t)| dt = \int_0^1 \underbrace{|2+t|}_{\leq 3} |f(t)| dt \\ &\leq 3 \int_0^1 |f(t)| dt = 3 \|f\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Altså er R kontinuerlig.

Problem 4 (10 poeng)

La A være matrisen $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Beregn singularverdidekomposisjonen til A .

(Du får full uttelling om du bare beregner den reduserte SVD'en til A .)

Løsning: Vi beregner Gram-matrisen:

$$A^*A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

som har karakteristisk polynom

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3.$$

Dette har røtter $\lambda_1 = 3$ og $\lambda_2 = 1$. De tilhørende egenvektorene $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2$ må oppfylle

$$0 = (A^*A - 3I_2)\tilde{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \tilde{u}_1,$$

så for eksempel $\tilde{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, og

$$0 = (A^*A - I_2)\tilde{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tilde{u}_2,$$

så for eksempel $\tilde{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Normaliserer vi disse får vi

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Singulærverdiene er gitt ved $\sigma_1 := \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{3}$ og $\sigma_2 = \sqrt{1} = 1$. De tilhørende v -vektorene får vi slik:

$$v_1 := \frac{1}{\sigma_1} A u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

og

$$v_2 = \frac{1}{\sigma_2} A u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Den reduserte SVD'en til A er dermed

$$A = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

For å finne den fulle SVD'en til A , finner vi en vektor $v_3 \in \mathbb{R}^3$ slik at (v_1, v_2, v_3) er ortonormal. Vi kan for eksempel gjøre Gram-Schmidt på listen

(v_1, v_2, e_1) , der $e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, og få

$$\begin{aligned} \tilde{v}_3 &= e_1 - (e_1 \cdot v_1)v_1 - (e_1 \cdot v_2)v_2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

og dermed

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Den fulle SVD'en blir dermed

$$A = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Problem 5 (10 poeng)

La $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ være funksjonen

$$f(t) := \begin{cases} 1 & \text{for } t \in [-\pi, 0), \\ -1 & \text{for } t \in [0, \pi). \end{cases}$$

Beregn fourierrekken til f . Hva kan vi si om konvergens av denne fourierrekken basert på pensum i *MAT1125*?

Løsning: Vi har

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = 0$$

og

$$\begin{aligned} f_k &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^0 e^{-ikt} dt - \int_0^{\pi} e^{-ikt} dt \right) \\ &= \frac{-1}{2\pi i k} \left((1 - e^{ik\pi}) - (e^{-ik\pi} - 1) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i k} (e^{ik\pi} + e^{-ik\pi} - 2) \\ &= \frac{1}{\pi i k} ((-1)^k - 1). \end{aligned}$$

Dermed er fourierrekken til f

$$\sum_{k \neq 0} \frac{1}{\pi i k} ((-1)^k - 1) e^{ikt}.$$

Om ønskelig kan man forenkle dette til

$$\sum_{\ell \in \mathbb{N}} \frac{2}{(2\ell - 1)\pi} \sin((2\ell - 1)t).$$

Funksjonen f er ikke kontinuerlig på sirkelen, så teorien i *MAT1125* garanterer ikke at fourierrekken til f konvergerer mot f .