

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT1125 — Videregående lineær algebra

Eksamensdag: 21. januar 2026

Tid for eksamen: 15:00 – 19:00

Oppgavesettet er på 2 sider.

Vedlegg: Ingen

Tillatte hjelpemidler: Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Merk: Høyeste mulige poengsum er 100 poeng.

Problem 1 (40 poeng)

For en $n \in \mathbb{N}$ lar vi $\mathcal{P}_n := \{\text{alle reelle polynomer av grad høyst } n\}$. La $S: \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_3$ være definert ved

$$Sp(t) := \int_1^t p(s) ds \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

for $p \in \mathcal{P}_2$. (For $t < 1$ tolker vi uttrykket $\int_1^t p(s) ds$ som $-\int_t^1 p(s) ds$, som vanlig.)

1a

Vis at S er en veldefinert lineær avbildning fra $\mathcal{P}_2$ til $\mathcal{P}_3$.

1b

La $p_0, p_1, \dots$ være standardbasispolynomene $p_0(t) := 1$, $p_k(t) := t^k$ for $t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. La

$$\mathcal{B} := (p_0, p_1, p_2) \quad \text{og} \quad \mathcal{C} := (p_0, p_1, p_2, p_3)$$

være standardbasisene for $\mathcal{P}_2$ og $\mathcal{P}_3$. (Du trenger ikke å vise at disse er basiser.) Finn basisrepresentasjonen $[S]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ av S .

1c

Bruk basisrepresentasjonen til å finne Sp når $p(t) = 5 - 2t + 3t^2$.

1d

Vis at $\dim \operatorname{im} S = 3$. Er S surjektiv?

(Fortsettes på side 2.)

1e

Finn dimensjonen til kjernen til S . Er S injektiv?

Problem 2 (10 poeng)

La U være et indreproduktrom med ortonormal basis $(u_1, \dots, u_n)$, og la $\|\cdot\|$ være normen induisert av indreproduktet. Bevis at

$$\|u\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |\langle u, u_k \rangle|^2} \quad \forall u \in U.$$

Problem 3 (30 poeng)

La $U := C^0([0, 1], \mathbb{R})$, mengden av kontinuerlige funksjoner fra $[0, 1]$ til $\mathbb{R}$.

3a

Definer $\|f\|_{L^1} := \int_0^1 |f(t)| dt$ for $f \in U$. Vis at $\|\cdot\|_{L^1}$ er en norm på U .

3b

Definer $R: U \rightarrow U$ ved $(Rf)(t) := (2+t)f(t)$ for alle $t \in [0, 1]$. Vis at R er veldefinert og lineær.

3c

Vis at R er kontinuerlig (med hensyn på normen $\|\cdot\|_{L^1}$).

Problem 4 (10 poeng)

La A være matrisen $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Beregn singulærverdidekomposisjonen til A .

(Du får full uttelling om du bare beregner den reduserte SVD'en til A .)

Problem 5 (10 poeng)

La $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ være funksjonen

$$f(t) := \begin{cases} 1 & \text{for } t \in [-\pi, 0), \\ -1 & \text{for } t \in [0, \pi). \end{cases}$$

Beregn fourierrekken til f . Hva kan vi si om konvergens av denne fourierrekken basert på pensum i MAT1125?