

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT1125 — Videregående lineær algebra

Eksamensdag: 11. desember 2025

Tid for eksamen: 15:00 – 19:00

Oppgavesettet er på 6 sider.

Vedlegg: Ingen

Tillatte hjelpemidler: Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Merk: Høyeste mulige poengsum er 90 poeng.

Problem 1 (20 poeng)

Vi betrakter vektorrommet $\mathbb{R}^3$ utstyrt med prikkproduktet.

1a (10 poeng)

Vis at (u_1, u_2, u_3) er en basis for $\mathbb{R}^3$, der

$$u_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1b (10 poeng)

Finn en ortonormal basis (v_1, v_2, v_3) for $\mathbb{R}^3$, hvor v_1 er parallell med u_3 .

Løsning:

1a

Om $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ er slik at $\sum_{k=1}^3 \alpha_k u_k = 0$, er

$$0 = \alpha_k u_k = \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_1 + \alpha_3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

Første komponent sier at $\alpha_3 = 0$; andre komponent impliserer da at $\alpha_1 = 0$; og tredje komponent sier til slutt at $\alpha_2 = 0$. Altså er listen lineært uavhengig. Siden $\mathbb{R}^3$ har dimensjon 3, og listen har tre elementer, er vi nå ferdig.

(Fortsettes på side 2.)

1b

Siden (u_1, u_2, u_3) er lineært uavhengig, er også (u_3, u_1, u_2) lineært uavhengig. Vi gjør Gram–Schmidt på sistnevnte liste:

$$v_1 := \frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{v}_2 := u_1 - (u_1 \cdot v_1)v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix},$$

$$v_2 := \frac{\tilde{v}_2}{\|\tilde{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_3 &:= u_2 - (u_2 \cdot v_1)v_1 - (u_2 \cdot v_2)v_2 \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1/3 + 2/6 \\ -1/3 - 1/6 \\ 1 - 1/3 - 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$v_3 := \frac{\tilde{v}_3}{\|\tilde{v}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Problem 2 (10 poeng)

La U og V være endeligdimensjonale vektorrom og la $T \in \mathcal{L}(U, V)$. For hvert av følgende utsagn om T skal du gi et eksempel, eller bevise at ingen slik T eksisterer.

- (i) T er injektiv, og $\dim U < \dim V$
- (ii) T er injektiv, og $\dim U > \dim V$
- (iii) T er surjektiv, og $\dim U < \dim V$
- (iv) T er surjektiv, og $\dim U > \dim V$.

Løsning:

(i) La $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(u) = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}$.

(ii) Ingen slik T eksisterer. Ifølge dimensjonsatsen er

$$\dim \operatorname{im} T = \dim U - \dim \ker T.$$

Vi har $\dim \operatorname{im} T \leq \dim V$ og $\dim \ker T = 0$ (siden T er injektiv), så

$$\dim V \geq \dim U,$$

(Fortsettes på side 3.)

som motsier antagelsen om at $\dim U > \dim V$.

(iii) Ingen slik T eksisterer. Ifølge dimensjonsatsen er

$$\dim \ker T = \dim U - \dim \operatorname{im} T.$$

Vi har $\dim \ker T \geq 0$ og $\dim \operatorname{im} T = \dim V$ (siden T er surjektiv, slik at $\operatorname{im} T = V$), så

$$0 \leq \dim U - \dim V,$$

som motsier antagelsen om at $\dim U < \dim V$.

(iv) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $T((u_1, u_2)) = u_1$.

Problem 3 (10 poeng)

La $T \in \mathcal{L}(U, V)$, der U og V er normerte vektorrom. Anta at T er kontinuert i origo (altså nullvektoren i U). Vis at T er kontinuert i alle punkter $u \in U$.

Løsning: La $\varepsilon > 0$, og la $\delta > 0$ være slik at om $v \in U$ og $\|v - 0\|_U < \delta$ er også $\|Tv - T0\|_V < \varepsilon$. La nå $w \in U$ være slik at $\|w - u\|_U < \delta$. Om $v := w - u$, er $\|v - 0\|_U < \delta$, så

$$\|Tw - Tu\|_V = \|T(w - u) - \underbrace{T0}_{=0}\|_V = \|Tv - T0\|_V < \varepsilon.$$

Altså er T kontinuert i u .

Problem 4 (10 poeng)

La $A := \begin{pmatrix} 3/2 & -1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

(i) Finn diagonaliseringen av A .

(ii) Løs differensligningen $x_{k+1} = Ax_k$ (for $k = 0, 1, \dots$), $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(iii) Hva skjer med x_k når $k \rightarrow \infty$?

Løsning:

(i) A har karakteristisk polynom

$$p_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - 3/2\lambda + 1/2,$$

som har røtter $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 1/2$. De tilhørende egenvektorene oppfyller

$$(A - \lambda_1 I_2)u_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix} u_1 = 0,$$

så for eksempel $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, og

$$(A - \lambda_2 I_2)u_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} u_2 = 0,$$

(Fortsettes på side 4.)

så for eksempel $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vi definerer nå $D := \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ og

$$R := (u_1 \ u_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dermed er diagonaliseringen av A

$$A = RDR^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(ii) Differensligningen $x_{k+1} = Ax_k$ har løsning $x_k = A^k x_0$, som kan skrives som

$$\begin{aligned} x_k &= RD^k R^{-1} x_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & 1/2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 1/2^k \\ 1 - 1/2^k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(iii) Når $k \rightarrow \infty$, vil x_k nærme seg u_1 , egenvektoren tilhørende $\lambda_1 = 1$.

Problem 5 (10 poeng)

La U være et endeligdimensjonalt indreproduktrom. Vi husker at en lineær operator $T \in \mathcal{L}(U)$ er *unitær* om den er inverterbar og $T^{-1} = T^*$. Vis at $\|Tu\| = \|u\|$ for alle $u \in U$ når T er unitær.

Løsning: Siden U er endeligdimensjonalt, har T en adjungert T^* . Da er

$$\|Tu\|^2 = \langle Tu, Tu \rangle = \langle u, T^*Tu \rangle = \langle u, T^{-1}Tu \rangle = \langle u, u \rangle = \|u\|^2.$$

Når vi tar kvadratrøtter får vi $\|Tu\| = \|u\|$, som vi ønsket.

Problem 6 (10 poeng)

La U og V være endeligdimensjonale indreproduktrom, og la $T \in \mathcal{L}(U, V)$ ha singulærverdidekomposisjon

$$Tu = \sum_{k=1}^r \sigma_k \langle u, u_k \rangle v_k \quad \text{for } u \in U.$$

(Her er $r \geq 0$ antall positive singulærverdier, og vi ordner $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$.)

Vis at operatornormen til T er σ_1 (den største singulærverdien), og at $\|T\|_{\mathcal{L}} = \|Tu\|_V / \|u\|_U$ når $u = u_1$.

Løsning:

La $u \in U$. Siden $u = \sum_{k=1}^n \langle u, u_k \rangle u_k$ og $(u_1, \dots, u_n)$ er ortonormal, er

$$\|u\|_U^2 = \sum_{k=1}^n |\langle u, u_k \rangle_U|^2,$$

(Fortsettes på side 5.)

og siden $Tu = \sum_{k=1}^r \sigma_k \langle u, u_k \rangle_U v_k$ og $(v_1, \dots, v_r)$ er ortonormal, er

$$\|Tu\|_V^2 = \sum_{k=1}^r |\sigma_k|^2 |\langle u, u_k \rangle_U|^2.$$

Siden $\sigma_1 \geq \sigma_2, \dots, \sigma_r$, er da

$$\|Tu\|_V^2 \leq \sum_{k=1}^r |\sigma_1|^2 |\langle u, u_k \rangle_U|^2 \leq |\sigma_1|^2 \sum_{k=1}^n |\langle u, u_k \rangle_U|^2 = |\sigma_1|^2 \|u\|_U^2.$$

Dermed er $\|Tu\|_V / \|u\|_U \leq \sigma_1$, slik at $\|T\|_{\mathcal{L}} := \sup_{u \neq 0} \|Tu\|_V / \|u\|_U \leq \sigma_1$. Når $u = u_1$ er

$$\frac{\|Tu_1\|_V}{\|u_1\|_U} = \left(\frac{\sum_{k=1}^r |\sigma_k|^2 |\langle u_1, u_k \rangle_U|^2}{\|u_1\|_U^2} \right)^{1/2} = \left(\frac{|\sigma_1|^2}{1} \right)^{1/2} = \sigma_1.$$

Altså er $\|T\|_{\mathcal{L}} = \sigma_1$, og $\|Tu\|_V / \|u\|_U = \sigma_1$ når $u = u_1$.

Problem 7 (20 poeng)

7a (10 poeng)

La $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ være funksjonen

$$f(t) := 1 - t^2 \quad \text{for } t \in [-\pi, \pi).$$

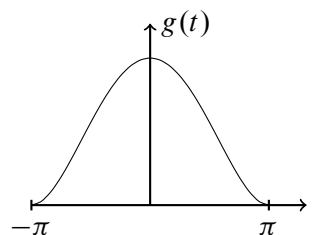
Beregn fourierrekken til f .

7b (10 poeng)

La $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ være funksjonen

$$g(t) := (t - \pi)^2(t + \pi)^2 \quad \text{for } t \in [-\pi, \pi)$$

Forklar hvorfor fourierrekken til g konvergerer mot g både uniformt og i L^2 -normen.



Løsning:

7a

Vi har

$$\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - t^2) e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 e^{-ikt} dt.$$

Om $k = 0$ får vi

$$\hat{f}_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = 1 - \frac{\pi^2}{3}.$$

(Fortsettes på side 6.)

For $k \neq 0$ har vi

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} dt = \left[\frac{e^{-ikt}}{-ik} \right]_{t=-\pi}^{\pi} = 0,$$

mens

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 e^{-ikt} dt &= \underbrace{\left[t^2 \frac{e^{-ikt}}{-ik} \right]_{t=-\pi}^{\pi}}_{=0} - \int_{-\pi}^{\pi} 2t \frac{e^{-ikt}}{-ik} dt \\ &= \frac{2}{ik} \int_{-\pi}^{\pi} t e^{-ikt} dt \\ &= \frac{2}{ik} \left[t \frac{e^{-ikt}}{-ik} \right]_{t=-\pi}^{\pi} - \frac{2}{ik} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-ikt}}{-ik} dt}_{=0} \\ &= \frac{2}{-i^2 k^2} \left(\pi e^{-ik\pi} - (-\pi) e^{-ik(-\pi)} \right) \\ &= \frac{4\pi}{k^2} (-1)^k, \end{aligned}$$

der vi har delvis integrert to ganger og brukt identiteten $e^{-ik\pi} = e^{ik\pi} = (-1)^k$. Dermed er

$$\hat{f}_k = -\frac{1}{2\pi} \frac{4\pi}{k^2} (-1)^k = -\frac{2}{k^2} (-1)^k \quad \text{for } k \neq 0.$$

Altså er fourierrekken til f

$$1 - \frac{\pi^2}{3} - \sum_{k \neq 0} \frac{2}{k^2} (-1)^k e^{ikt}.$$

7b

Funksjonen g er to ganger kontinuerlig deriverbar på $\mathbb{T}$: Den er opplagt to ganger kontinuerlig deriverbar for $t \in (-\pi, \pi)$, med deriverte

$$g'(t) = 4t(t-\pi)(t+\pi), \quad g''(t) = 2(t+\pi)^2 + 8(t-\pi)(t+\pi) + 2(t-\pi)^2,$$

og i endepunktene $t = \pm\pi$ er

$$\begin{array}{lll} g(-\pi) = 0, & g'(-\pi) = 0, & g''(-\pi) = 8\pi^2, \\ g(\pi) = 0, & g'(\pi) = 0, & g''(\pi) = 8\pi^2, \end{array}$$

så g' og g'' er også kontinuerlige på $\mathbb{T}$. Av teoremet om uniform konvergens av funksjoner i C^2 , vil fourierrekken til g konvergere uniformt. Siden uniform konvergens impliserer L^2 -konvergens, får vi også L^2 -konvergens.