

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT1125 — Videregående lineær algebra

Eksamensdag: 11. desember 2025

Tid for eksamen: 15:00 – 19:00

Oppgavesettet er på 2 sider.

Vedlegg: Ingen

Tillatte hjelpemidler: Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Merk: Høyeste mulige poengsum er 90 poeng.

Problem 1 (20 poeng)

Vi betrakter vektorrommet $\mathbb{R}^3$ utstyrt med prikkproduktet.

1a (10 poeng)

Vis at (u_1, u_2, u_3) er en basis for $\mathbb{R}^3$, der

$$u_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1b (10 poeng)

Finn en ortonormal basis (v_1, v_2, v_3) for $\mathbb{R}^3$, hvor v_1 er parallell med u_3 .

Problem 2 (10 poeng)

La U og V være endeligdimensjonale vektorrom og la $T \in \mathcal{L}(U, V)$. For hvert av følgende utsagn om T skal du gi et eksempel, eller bevise at ingen slik T eksisterer.

- (i) T er injektiv, og $\dim U < \dim V$
- (ii) T er injektiv, og $\dim U > \dim V$
- (iii) T er surjektiv, og $\dim U < \dim V$
- (iv) T er surjektiv, og $\dim U > \dim V$.

Problem 3 (10 poeng)

La $T \in \mathcal{L}(U, V)$, der U og V er normerte vektorrom. Anta at T er kontinuertlig i origo (altså nullvektoren i U). Vis at T er kontinuertlig i alle punkter $u \in U$.

(Fortsettes på side 2.)

Problem 4 (10 poeng)

$$\text{La } A := \begin{pmatrix} 3/2 & -1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Finn diagonaliseringen av A .

(ii) Løs differensligningen $x_{k+1} = Ax_k$ (for $k = 0, 1, \dots$), $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(iii) Hva skjer med x_k når $k \rightarrow \infty$?

Problem 5 (10 poeng)

La U være et endeligdimensjonalt indreproduktrom. Vi husker at en lineær operator $T \in \mathcal{L}(U)$ er *unitær* om den er inverterbar og $T^{-1} = T^*$. Vis at $\|Tu\| = \|u\|$ for alle $u \in U$ når T er unitær.

Problem 6 (10 poeng)

La U og V være endeligdimensjonale indreproduktrom, og la $T \in \mathcal{L}(U, V)$ ha singularverdidekomposisjon

$$Tu = \sum_{k=1}^r \sigma_k \langle u, u_k \rangle v_k \quad \text{for } u \in U.$$

(Her er $r \geq 0$ antall positive singularverdier, og vi ordner $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$.)
Vis at operatornormen til T er σ_1 (den største singularverdien), og at $\|T\|_{\mathcal{L}} = \|Tu\|_V / \|u\|_U$ når $u = u_1$.

Problem 7 (20 poeng)

7a (10 poeng)

La $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ være funksjonen

$$f(t) := 1 - t^2 \quad \text{for } t \in [-\pi, \pi).$$

Beregn fourierrekken til f .

7b (10 poeng)

La $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ være funksjonen

$$g(t) := (t - \pi)^2(t + \pi)^2 \quad \text{for } t \in [-\pi, \pi)$$

Forklar hvorfor fourierrekken til g konvergerer mot g både uniformt og i L^2 -normen.

