UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1140 — Strukturer og argumenter
Eksamensdag:	Mandag 9. desember, 2013
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Alle punkter (1, 2a), 2b), 3a) osv.) teller i utgangspunktet likt i sensuren.

Oppgave 1. Vis at utsagnene $(\sim(A \vee \sim B)) \wedge (\sim(C \vee A))$ og $\sim A \wedge B \wedge \sim C$ er ekvivalente.

Oppgave 2.

a) Skriv 1 som en lineærkombinasjon av 19 og 11 og bruk resultatet til å finne $\overline{11}^{-1}$ i $\mathbb{Z}/(19)$.

b) Løs ligningssystemet

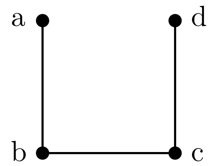
$$\begin{aligned} \overline{2} \cdot \overline{x} + \overline{y} &= \overline{2} \\ \overline{7} \cdot \overline{x} - \overline{2} \cdot \overline{y} &= \overline{4} \end{aligned}$$

i $\mathbb{Z}/(19)$.

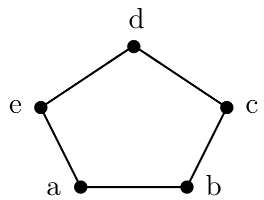
Oppgave 3. Anta at $G = (V, E)$ er en graf. *Komplementgrafen* til G er grafen $G^c = (V, E^c)$ som har de samme hjørnene som G, men der to hjørner er forbundet hvis og bare hvis de *ikke* er forbundet i G.

a) Finn komplementgrafene til grafene i figur (i) og (ii).

(i)



(ii)



Anta at $G_1 = (V_1, E_1)$ og $G_2 = (V_2, E_2)$ er to grafer. En *isomorfi* mellom G_1 og G_2 er en bijeksjon $f : V_1 \to V_2$ slik at det går en kant mellom to hjørner u og v i G_1 hvis og bare hvis det går en kant mellom de tilsvarende to hjørnene $f(u)$ og $f(v)$ i G_2. To grafer kalles *isomorfe* dersom det finnes en isomorfi mellom dem, og en graf kalles *selvkomplementær* dersom den er isomorf med sin komplementgraf.

(Fortsettes på side 2.)

b) Vis at grafene i figur (i) og (ii) er selvkomplementære.

c) Vis at dersom en graf G har n hjørner, så har G og G^c til sammen $\frac{n(n-1)}{2}$ kanter. Bruk dette til å vise at dersom G er selvkomplementær, så er $n \equiv 0 \pmod 4$ eller $n \equiv 1 \pmod 4$.

Oppgave 4. Et *ultrafilter* på $\mathbb{N}$ er en familie $\mathcal{U}$ av delmengder av $\mathbb{N}$ slik at:

(i) Hvis $F, G \in \mathcal{U}$, så er $F \cap G \in \mathcal{U}$.

(ii) Hvis $F \in \mathcal{U}$ og $G \supseteq F$, så er $G \in \mathcal{U}$.

(iii) For alle $F \subseteq \mathbb{N}$ er enten F eller F^c med i $\mathcal{U}$, men ikke begge.

I denne oppgaven antar vi at $\mathcal{U}$ er et ultrafilter på $\mathbb{N}$.

a) Vis at hvis $F_1, F_2, \ldots, F_n \in \mathcal{U}$, så er $F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n \in \mathcal{U}$.

b) Vis at $\mathbb{N} \in \mathcal{U}$, men $\emptyset \notin \mathcal{U}$.

c) Vis at dersom $F \cup G \in \mathcal{U}$, så er minst én av mengdene F, G med i $\mathcal{U}$.

I resten av oppgaven er $\mathcal{X}$ mengden av alle følger $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ av naturlige tall. Definer en relasjon $\sim$ på $\mathcal{X}$ ved

$$\{x_n\} \sim \{y_n\} \iff \{n \in \mathbb{N} \mid x_n = y_n\} \in \mathcal{U}$$

d) Vis at $\sim$ er en ekvivalensrelasjon.

La $[\{x_n\}]$ være ekvivalensklassen til $\{x_n\}$ og la ${}^*\mathbb{R}$ være mengden av alle ekvivalensklasser.

e) Forklar at man kan definere en relasjon $\leq$ på ${}^*\mathbb{R}$ ved

$$[\{x_n\}] \leq [\{y_n\}] \iff \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \leq y_n\} \in \mathcal{U}$$

(dvs. vis at relasjonen er veldefinert).

f) Vis at $\leq$ er en total ordning på ${}^*\mathbb{R}$.

SLUTT