MAT1140: Kort sammendrag av grafteorien

Dette notatet gir en kort oversikt over den delen av grafteorien som er gjennomgått i MAT1140 høsten 2013. Vekten er på den logiske oppbygningen, og jeg har utelatt all motivasjon og (nesten) alle figurer.

Definisjon 1 *En* graf $G = (V, E)$ *består av en endelig, ikke-tom mengde* V *og en samling* E *av uordnede par* $\{u, v\}$ *av* ulike *elementer* $u, v \in V$*. Punktene i* V *kalles* hjørnene *eller* nodene *i grafen, men elementene i* E *kalles* kanter*. Vi sier at kanten* $\{u, v\}$ forbinder u *og* v*, og at* u *og* v hører til *kanten* $\{u, v\}$*.*

Bemerkning: Vi tillater altså ikke at det går kanter fra et hjørne til seg selv (*løkker*) eller at det går flere kanter mellom de samme to punktene. Det finnes imidlertid sammenhenger der man ønsker å tillate slike "grafer" (grafer med løkker og multigrafer) også.

En *vandring* eller en *tur* er en alternerende sekvens

$$u_0, e_1, u_1, e_2, \ldots, u_{n-1}, e_n, u_n$$

av hjørner og kanter der hver kant e_i forbinder de to hjørnene den ligger mellom, dvs. $e_i = \{u_{i-1}, u_i\}$ for alle i. Ofte benytter vi en forenklet skrivemåte for vandringer:

$$u_0 \longrightarrow u_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow u_{n-1} \longrightarrow u_n$$

Lengden til en vandring er antall kanter som inngår, så vandringen over har lengde n. Vi godtar vandringer av lengde 0, dvs. vandringer av typen u_0 der man bare står stille i et punkt.

En *sti* er en vandring $u_0 \longrightarrow u_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow u_{n-1} \longrightarrow u_n$ der ingen hjørner forekommer mer enn én gang.

Setning 2 *Det finnes en sti fra* u *til* v *hvis og bare hvis det finnes en vandring fra* u *til* v*.*

Bevis: Siden enhver sti er en vandring, er den ene implikasjonen opplagt. For den andre implikasjonen antar vi at det finnes vandringer fra u til v, og velger en med minimal lengde

$$u \longrightarrow u_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow u_{n-1} \longrightarrow v$$

Dette må være en sti, for hvis ikke finnes det to hjørner u_i og u_j, $i < j$, som er like, og da kan vi forkorte vandringen til

$$u \longrightarrow u_1 \longrightarrow \ldots u_i \longrightarrow u_{j+1} \longrightarrow u_{n-1} \longrightarrow v$$

noe som åpenbart er umulig siden vi startet med en vandring med minimal lengde. $\square$

En *sykel* er en vandring

$$u_0 \longrightarrow u_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow u_{n-1} \longrightarrow u_0$$

med lengde minst tre som begynner og ender i samme punkt, og der ingen av hjørnene $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ er like. Grunnen til at vi krever at lengden skal være minst tre, er at vi ikke ønsker å regne vandringen

$$u_0 \longrightarrow u_1 \longrightarrow u_0,$$

som går frem og tilbake på samme kant, som en sykel.

Definisjon 3 *En graf er* sammenhengende *dersom uansett hvilke hjørner $u, v \in V$ vi velger, så finnes det en vandring fra u til v.*

Ifølge setningen ovenfor er to punkter i en sammenhengende grad alltid forbundet av en sti.

For ikke-sammenhengende grafer, er det nyttig å innføre relasjonen $\sim$ definert ved

$$u \sim v \Longleftrightarrow \text{det finnes en vandring fra } u \text{ til } v$$

Setning 4 *$\sim$ er en ekvivalensrelasjon.*

Bevis: Vi må vise at $\sim$ tilfredsstiller de tre kravene til en ekvivalensrelasjon:

(i) Refleksivitet: Vandringen u (av lengde 0) forbinder u med seg selv, og følgelig er $u \sim u$.

(ii) Symmetri: Går det en vandring fra u til v, så går det også en vandring (den "baklengse") fra v til u.

(iii) Transitivitet: Går det en vandring $u \longrightarrow u_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow u_{n-1} \longrightarrow v$ fra u til v, og en vandring $v \longrightarrow v_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow v_{k-1} \longrightarrow w$, så går den sammensatte vandringen $u \longrightarrow u_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow u_{n-1} \longrightarrow v \longrightarrow v_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow v_{k-1} \longrightarrow w$ fra u til w. Dette viser at hvis $u \sim v$ og $v \sim w$, så er $u \sim w$ □

Ekvivalensklassene til $\sim$ kalles *komponentene* til grafen. To hjørner ligger i samme komponent hvis og bare hvis de er forbundet av en vandring.

Setning 5 *Fjerner vi en kant fra en sammenhengende graf, vil den enten fortsette å være sammenhengende eller dele seg i to komponenter.*

Bevis: Vi skal vise at i den nye grafen er ethvert punkt forbundet med enten u eller v, og dermed kan det maksimalt være to komponenter: den u ligger i og den v ligger i (disse kan godt være den samme). Siden den opprinnelige grafen er sammenhengende, finnes det for ethvert hjørne $w \in V$ en sti

$$w \longrightarrow u_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow u_{n-1} \longrightarrow u$$

fra w til u. Hvis denne stien ikke inneholder den fjernede kanten, vil den også være en sti fra w til u i den nye grafen. Dersom den inneholder den fjernede kanten, må det være som siste kant siden u bare kan være med i stien én gang; dvs. stien er

$$w \longrightarrow u_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow v \longrightarrow u$$

Kutter vi ut det siste skrittet, har vi dermed funnet en vandring fra w til v i den nye grafen. Dette viser at w er forbundet med enten u eller v (eller begge). □

Setning 6 *Anta at e er en kant i en sammenhengende graf G. Grafen vi får ved å fjerne e fra G er sammenhengende hvis og bare hvis det finnes en sykel i G som inneholder e.*

Bevis: La $e = \{u, v\}$. Hvis grafen vi får ved å fjerne e er sammenhengende, inneholder den en sti

$$v \longrightarrow u_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow u_{n-1} \longrightarrow u$$

fra v til u. Dermed er

$$u \longrightarrow v \longrightarrow u_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow u_{n-1} \longrightarrow u$$

en sykel i G som inneholder e.

Anta omvendt at det finnes en sykel

$$u \longrightarrow v \longrightarrow u_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow u_{n-1} \longrightarrow u$$

i G som inneholder e. Da er

$$v \longrightarrow u_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow u_{n-1} \longrightarrow u$$

en sti fra v til u i den reduserte grafen. □

Trær

Definisjon 7 *Et* tre *er en sammenhengende graf uten sykler.*

Vi begynner med en nyttig observasjon.

Setning 8 *Anta at $G = (V, E)$ er en sammenhengende graf. Da finnes det en delmengde $E' \subseteq E$ slik at $G' = (V, E')$ er et tre; mao. kan vi alltid gjøre om en sammenhengende graf til et tre ved å fjerne noen av kantene.*

Bevis: Dersom G ikke allerede er et tre, må den inneholde en sykel. Ifølge setning 6 kan vi fjerne en kant fra denne sykelen uten å ødelegge sammenhengen til grafen. Enten sitter vi nå igjen med et tre, eller så finnes det fortsatt en sykel i grafen der vi kan fjerne en ny kant. Fortsetter vi på denne måten, kommer vi før eller siden frem til et tre (siden det bare er endelig mange kanter å fjerne, må prosedyren til slutt stoppe opp). □

Et tre som i setningen ovenfor kalles et *utspenningstre* for grafen G. Vanligvis finnes det mange utspenningstrær, og hvilket vi finner, avhenger av hvilke kanter vi fjerner.

Vi skal nå bevise noen nyttige karakteriseringer av trær:

Setning 9 *Anta at G er en graf med n hjørner og e kanter. Da er følgende ekvivalent.*

(i) G er et tre.

(ii) G er sammenhengende og $n = e + 1$.

Bevis: (i)$\Longrightarrow$(ii): Hvis G er et tre, er G sammenhengende per definisjon, og det er nok å vise at $n = e+1$. Vi gjør dette ved induksjon på e. Er $e = 1$, har grafen to noder, og følgelig gjelder formelen. Anta så at formelen gjelder for alle trær med k eller færre kanter, og la G være et tre med $k + 1$ kanter. Fjerner vi en kant fra G, sitter vi ifølge setning 5 og 6 igjen med to komponenter K_1 og K_2. Siden ingen av disse komponentene inneholder sykler (det er ingen sykler i G), må de være trær, og følgelig gjelder formelen for dem; dvs.

$$n_1 = e_1 + 1$$

$$n_2 = e_2 + 1$$

der n_1, n_2 er antall hjørner og e_1, e_2 er antall kanter i de to komponentene. Legger vi sammen disse ligningene og bruker at $n = n_1 + n_2$ og $e - 1 = e_1 + e_2$ (husk at vi fjernet en kant), får vi

$$n = n_1 + n_2 = (e_1 + 1) + (e_2 + 1) = e + 1$$

(ii)$\Longrightarrow$(i): Det holder å vise at G ikke har sykler. Anta for motsigelse at den har, da kan vi ifølge setning 8 redusere G til et tre G' ved å fjerne kanter. For treet G' gjelder relasjonen $n = e + 1$ som dermed ikke kan holde for G, og vi har selvmotsigelsen vi var på jakt etter. □

Den neste karakteriseringen bytter ut sammenheng med sykelfrihet:

Setning 10 *Anta at G er en graf med n hjørner og e kanter. Da er følgende ekvivalent.*

(i) G er et tre.

(ii) G har ikke sykler og $n = e + 1$.

Bevis: (i)$\Longrightarrow$(ii): Dette vet vi allerede.

(ii)$\Longrightarrow$(i): Det holder å vise at G er sammenhengende. Observér at hver av komponentene $K_1, K_2, \ldots, K_r$ til G er et tre. Ifølge det vi allerede har vist, har vi dermed

$$\begin{aligned} n_1 &= e_1 + 1 \\ n_2 &= e_2 + 1 \\ &\vdots \\ n_r &= e_r + 1 \end{aligned}$$

Legger vi samme, får vi $n = e + r$. Ifølge antagelsen er $n = e + 1$, så vi har $r = 1$. Dette betyr at G kun har én komponent, og altså er sammenhengende. $\square$

Setning 11 *Anta at G er en graf. Da er følgende ekvivalent.*

(i) G er et tre.

(ii) Mellom to punkter u, v i grafen finnes det alltid nøyaktig én sti.

Bevis: (i)$\Longrightarrow$(ii): Siden G er sammenhengende, finnes det minst én sti fra u til v. Anta for motsigelse at det finnes to forskjellige stier

$$u \longrightarrow u_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow u_{n-1} \longrightarrow v$$

og

$$u \longrightarrow v_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow v_{m-1} \longrightarrow v$$

fra u til v, og la i være det minste tallet slik at $u_i \neq v_i$. Definér også

$$j = \min\{k > i \mid \exists p > i(u_k = v_p \text{ or } v_k = u_p)\}$$

Intuitivt er i tidspunktet der stiene skiller lag for første gang, mens j markerer det første tidspunktet etter i der de krysser hverandre igjen. Vi har nå laget en sykel i G: Følg stien $u \longrightarrow u_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow u_{n-1} \longrightarrow v$ fra u_{i-1} til de to stiene møtes igjen, og følg deretter den andre stien baklengs fra møtepunktet tilbake til $v_{i-1} = u_{i-1}$. Dette er en selvmotsigelse siden G er et tre og dermed ikke har sykler.

(ii)$\Longrightarrow$(i) Det holder å vise at G ikke kan ha en sykel. Anta for motsigelse at den har en:

$$u_1 \longrightarrow u_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow u_{n-1} \longrightarrow u_1$$

Da er $u_2 \longrightarrow u_1$ og $u_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow u_{n-1} \longrightarrow u_1$ to forskjellige stier fra u_2 til u_1, noe som strider mot antagelse (ii). $\square$

Setning 12 *Anta at G er en graf. Da er følgende ekvivalent.*

(i) G er et tre.

(ii) G har ingen sykel, men legger vi til en ny kant, oppstår det en sykel.

Bevis: (i)$\Longrightarrow$(ii): Vi vet at G ikke har en sykel. Anta at det ikke går en kant fra u til v. Stien

$$u \longrightarrow u_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow u_{n-1} \longrightarrow v$$

i den opprinnelige grafen kan dermed utvides til en sykel

$$u \longrightarrow u_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow u_{n-1} \longrightarrow v \longrightarrow u$$

i den nye grafen vi får ved å legge til kanten $\{u, v\}$.

(ii)$\Longrightarrow$(i): Vi må vise at G er sammenhengende. Anta ikke og plukk punkter u, v i to forskjellige komponenter K og K'. Legger vi til kanten $\{u, v\}$, blir kombinasjonen av K og K' en sammenhengende graf G'. Siden G' blir usammenhengende om vi fjerner $\{u, v\}$ igjen, finnes det ifølge setning 6 ingen sykel i G' som inneholder $\{u, v\}$, og dermed ingen sykel i G' overhodet (den opprinnelige grafen inneholder jo ikke sykler). Siden ingen av de andre komponentene til G inneholder noen sykler, betyr det at vi kan legge $\{u, v\}$ til G uten å skape sykler, og det strider mot antagelse (ii).

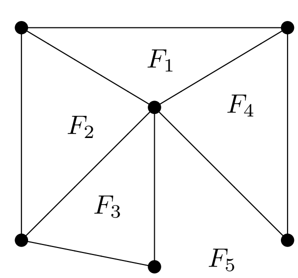
Planare grafer

I denne og den neste seksjonen skal vi til en viss grad basere oss på geometrisk intuisjon om kurver og områder i planet. Denne intuisjonen kan underbygges matematisk (blant annet gjennom å bevise *Jordans kurveteorem* som sier at enhver enkel, lukket, kontinuerlig kurve deler planet i to områder: innsiden av kurven og utsiden), men det ville ta for lang tid å gjøre dette her.

Den grunnleggende definisjonen er:

Definisjon 13 *En graf er* planar *dersom vi kan tegne den i planet uten at noen kanter krysser hverandre. En slik tegning kalles en* planar representasjon *av grafen.*

Legg merke til at planare grafer kan tegnes på forskjellige måter, og at noen egenskaper kan være avhengig av hvilken tegnemåte (planar representasjon) vi velger.



Kantene i en planar representasjon av en graf deler planet inn i endelig mange sammenhengende områder som kalles *fasetter*. Vær oppmerksom på at også den ytre delen ("utsiden av grafen") regnes som en fasett. Grafen ovenfor har fem fasetter F_1, F_2, F_3, F_4, F_5. Forskjellige representasjoner av samme graf gir opphav til ulike fasettstrukturer. I utgangspunktet er det ikke engang opplagt at ulike representasjoner av samme graf vil ha like mange fasetter, men det vil følge fra hovedresultatet i denne seksjonen:

Teorem 14 (Eulers formel) *La n være antall hjørner, e antall kanter og f antall fasetter i en planar representasjon av en sammenhengende graf. Da er*

$$n - e + f = 2$$

Bevisskisse: Vi bruker induksjon på antall fasetter f. Hvis $f = 1$, kan grafen ikke ha sykler og er derfor et tre. Ifølge setning 9 er da $n = e + 1$, og følgelig er $n - e + f = (n - e) + f = 1 + 1 = 2$.

Anta nå at resultatet holder for planare representasjoner med k fasetter, og la oss se på en planar representasjon med $k + 1$ fasetter. Fjerner vi en kant som inngår i en sykel, vil den nye grafen ha én kant og én fasett mindre enn før (når vi fjerner en slik kant, slår to fasetter seg sammen). Ved induksjon holder formelen for den nye grafen, og siden "vår" graf har én kant og én fasett mer, gjelder formelen også for den. $\square$

Korollar 15 *Alle planare representasjoner av samme graf har like mange fasetter.*

Bevis: Ifølge Eulers formel er $f = 2 - n + e$, og siden n og e er de samme for alle representasjoner, må f også være det. $\square$

Vi tar også med noen korollarer vi trenger i neste seksjon.

Korollar 16 *I en sammenhengende, planar graf med minst tre hjørner er $e \leq 3n - 6$, der e er antall kanter og n antall hjørner.*

Bevis: Velg en planar representasjon. La $\deg(F)$ være antall kanter som avgrenser fasetten F. Siden hver kant er med å avgrense to fasetter, er $2E = \sum_{F \in \mathcal{F}} \deg(F)$, der $\mathcal{F}$ er mengden av fasetter. Det må minst tre kanter til å avgrense en fasett (her bruker vi at grafen har minst tre hjørner), så $\deg(F) \geq 3$ og dermed

$$2e = \sum_{F \in \mathcal{F}} \deg(F) \geq 3f = 3(2 - n + e) = 6 - 3n + 3e$$

ifølge Eulers formel. Snur vi litt på denne ulikheten, får vi $e \leq 3n - 6$. $\square$

Graden til et hjørne i en graf er antall naboer det har. Graden til v betegnes med $\deg(v)$. Observér at siden hver kant hører til to hjørner, er

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2e$$

Korollar 17 *Enhver sammenhengende, planar graf har et hjørne av grad 5 eller lavere.*

Bevis: Vi kan åpenbart anta at grafen har flere enn tre hjørner. Hvis δ er den minste graden et hjørne har, ser vi ved hjelp av forrige korollar at

$$\delta n \leq \sum_{v \in V} \deg v = 2e \leq 2(3n-6) = 6n-12$$

og følgelig er $\delta < 6$. □

Fargelegging

Å *fargelegge* en graf vil si å gi hvert hjørne en farge uten at noen nabohjørner får samme farge. Det gjelder å fargelegge grafer med færrest mulig farger. Det første resultatet er lett:

Setning 18 *Anta at alle hjørnet i en graf G har grad mindre enn eller lik Δ. Da kan G fargelegges med $\Delta + 1$ (eller færre) farger.*

Bevis: Vi bruker induksjon på antall hjørner. Siden resultatet åpenbart holder for grafer med ett hjørne, kan vi konsentrere oss om induksjonstrinnet. Anta derfor at resultatet holder for grafer med k hjørner, og at G er en graf med $k+1$ hjørner. Lag en ny graf G' ved å fjerne et hjørne v og alle tilhørende kanter. Ved induksjonshypotesen kan G' fargelegges med $\Delta + 1$ farger. Siden v ikke har flere enn Δ naboer, er det minst én farge som ikke er brukt på noen av nabopunktene, og fargeleggingen kan derfor utvides fra G' til G. □

Fargelegging av grafer er nært knyttet til fargelegging av kart. Anta vi har et kart og ønsker å fargelegge landene slik at to naboland aldri får samme farge. Vi antar at landene er sammenhengende, og vi regner to land som naboer dersom de har et felles grensestykke (det holder altså ikke at de møtes i ett punkt). Det viser seg at det alltid er mulig å fargelegge slike kart med bare fire farger (*firefargeteoremet*). For å bevise firefargeteoremet er det nok å vise at alle planare grafer kan fargelegges med fire farger. Gitt et kart, kan vi nemlig velge et punkt (en hovedstad) i hvert land og trekke kurver som forbinder hovedstedene i land som grenser til hverandre. Det er mulig å gjøre dette på en slik måte at forbindelseskurvene aldri skjærer hverandre, og følgelig danner hovedstedene og forbindelseslinjene en planar graf. Enhver fargelegging av grafen kan utvides til en fargelegging av kartet (gi hele landet samme farge som hovestaden).

Det finnes ikke noe enkelt bevis for firefargeproblemet; alle kjente bevis bruker datamaskiner til å sjekke over tusen grunnleggende konfigurasjoner. Det finnes imidlertid overkommelig bevis for at alle planare grafer (og dermed alle kart) kan fargelegges med fem eller færre farger. Som en oppvarming starter vi med å vise at seks farger holder.

Teorem 19 (Seksfargeteoremet) *Enhver planar graf kan fargelegges med seks eller færre farger.*

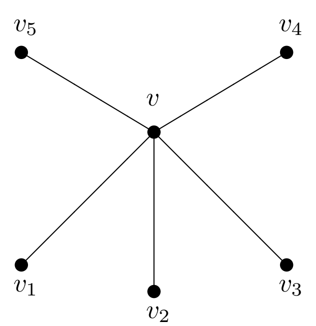
Bevis: Vi bruker induksjon på antall hjørner. Har grafen bare ett hjørne, er resultatet opplagt, så vi kan konsentrere oss om induksjonstrinnet. Anta at resultatet gjelder for grafer med k hjørner, og la G være en graf med $k+1$ hjørner. Ifølge Korollar 17 har v et hjørne med grad 5 eller lavere. Vi lager en ny graf G' ved å fjerne v og alle tilhørende kanter. Ifølge induksjonsantagelsen finnes det en fargelegging av G' med 6 eller færre farger. Siden v har høyst 5 naboer, kan denne fargeleggingen utvides til hele G. □

Beviset for at vi faktisk kan greie oss med fem farger, følger den samme idéen, men i tillegg trenger vi et smart triks:

Teorem 20 (Femfargeteoremet) *Enhver planar graf kan fargelegges med fem eller færre farger.*

Bevisskisse: Vi bruker induksjon på antall hjørner. Har grafen bare ett hjørne, er resultatet opplagt, så vi kan konsentrere oss om induksjonstrinnet. Anta at resultatet gjelder for grafer med k hjørner, og la G være en graf med $k+1$ hjørner. Vi antar for motsigelse at G *ikke* kan fargelegges med 5 farger.

Ifølge Korollar 17 har v et hjørne med grad 5 eller lavere. Vi lager en ny graf G' ved å fjerne v og alle tilhørende kanter. Ifølge induksjonsantagelsen finnes det en fargelegging av G' med 5 eller færre farger. Siden G *ikke* kan fargelegges med 5 farger, må v ha 5 nabopunkter som har 5 forskjellige farger (hvis ikke kunne vi ha utvidet fargeleggingen av G' til en fargelegging av G). Kall disse punktene v_1, v_2, v_3, v_4 og v_5, og nummerer dem i rekkefølge rundt klokken som vist på figuren. La c_i være fargen til v_i for $i = 1, 2, 3, 4, 5$.



Vi ser nå på delgrafen $G_{1,3}$ i G' som består av de hjørnene som har farge c_1 eller c_3 samt de kantene som forbinder slike hjørner. Anta at v_1 og v_3 ligger i to forskjellige komponenter i $G_{1,3}$. Da kan vi bytte om fargene c_1 og c_3 i komponenten til v_1 og fortsatt ha en fargelegging av G' (sjekk dette!). Siden vi nå er fri til å bruke farge c_1 på v, kan denne fargeleggingen utvides til en fargelegging av hele G, noe som er umulig siden vi har antatt at G ikke kan fargelegges med 5 farger. Følgelig må v_1 og v_3 tilhøre samme komponent av $G_{1,3}$, og det betyr at det finnes en sti fra v_1 til v_3 som bare består av hjørner med fargene c_1 og c_3.

På akkurat samme måte må det finnes en sti fra v_2 til v_4 som bare består av hjørner med farger c_2 og c_4. En tegning vil overbevise deg om at stien fra v_1 til v_3 må krysse stien fra v_2 til v_4, og det er umulig: Stiene kan ikke krysses i et hjørne siden de går på hjørner av forskjellig farge, og de kan ikke krysses utenfor et hjørne siden grafen er planar, og kanter derfor ikke krysser hverandre. Antagelsen om at G ikke kan fargelegges med 5 farger, leder altså til en selvmotsigelse, og beviset er fullført. $\square$