MAT1140: Partielle ordninger, Zorns lemma og utvalgsaksiomet

I dette notatet skal vi se på *Zorns lemma*, som er et kraftig redskap for å bevise eksistensen av matematiske objekter. Beviset for Zorns lemma bygger på det såkalte *utvalgsaksiomet*, et mengdeteoretisk prinsipp som går utover det vi hittil har sett på. Aller først skal vi imidlertid gå tilbake til teorien for partielle ordninger, både fordi Zorns lemma handler om slike ordninger, og fordi sammenhengen mellom partielle og totale ordninger vil være en viktig ledetråd i arbeidet vårt.

Partielle og totale ordninger

Husk at en *partiell ordning* på en mengde X er en relasjon $\leq$ på X som tilfredsstiller følgende krav:

(i) *Refleksivitet:* $x \leq x$ for alle $x \in X$.

(ii) *Antisymmetri:* Hvis $x \leq y$ og $y \leq x$, så er $x = y$.

(iii) *Transitivitet:* Hvis $x \leq y$ og $y \leq z$, så er $x \leq z$.

En partiell ordning er *total* dersom uansett hvilke elementer x, y vi velger i X, så er enten $x \leq y$ eller $y \leq x$. Dersom ordningen ikke er total, finnes det elementer x, y slik at hverken $x \leq y$ eller $y \leq x$. Slike elementer kalles *ikke sammenlignbare*.

Formelt er en relasjon på X en delmengde av $X \times X$, f. eks. er

$$\leq = \{(x, y) \mid x \leq y\}$$

Selv om denne formelen ser litt underlig ut, vil det i dette notatet ofte være nyttig å huske at en relasjon egentlig er en mengde av ordnede par. Vi kan f.eks. bruke denne tenkemåten til å definere at en partiell relasjon $\leq_2$ er *finere* enn en annen partiell relasjon $\leq_1$ dersom $\leq_1 \subseteq \leq_2$. En ekvivalent måte å definere dette på, er å kreve at

$$x \leq_1 y \implies x \leq_2 y$$

Vi sier også at $\leq_2$ er en *forfining* av $\leq_1$.

Det er naturlig å spørre om enhver partiell ordning kan forfines til en total ordning. Prøver man seg på noen enkle eksempler, ser at man at det i praksis ikke er så vanskelig å få til en slik forfining, men at det krever en viss systematikk og koordinering. Denne systematikken er bygget inn i beviset for den neste setningen.

Setning 1 *Anta at $\leq$ er en partiell ordning på en mengde X, og at $x, y \in X$ ikke er sammenlignbare. Da finnes det en forfining $\leq_1$ av $\leq$ slik at $x \leq_1 y$.*

Bevis: Vi må åpenbart utvide $\leq$ (tenkt på ordningen som en mengde) med paret (x, y). Dette er imidlertid ikke nok siden en slik utvidelse normalt ikke vil være transitiv. For å få til en transitiv utvidelse viser det seg at vi må legge til alle par (u, v) der $u \leq x$ og $y \leq v$. Vi setter altså

$$\leq_1 = \leq \cup \{(u, v) \in X^2 \mid u \leq x \text{ og } y \leq v\}$$

Sagt på en annen måte, definerer vi

$$u \leq_1 v \iff \begin{cases} u \leq v & \text{(alternativ I)} \\ \\ \text{eller} \\ \\ u \leq x \text{ og } y \leq v & \text{(alternativ II)} \end{cases}$$

Siden alternativ II holder for $u = x$, $v = y$, er $x \leq_1 y$. Vi må vise at $\leq_1$ tilfredsstiller de tre kravene til en partiell ordning.

Refleksivitet: Siden $u \leq u$, er åpenbart $u \leq_1 u$ for alle $u \in X$.

Antisymmetri: Anta at $u \leq_1 v$ og $v \leq_1 u$. For å vise at $u = v$, må vi drøfte fire forskjellige muligheter avhengig av om $u \leq_1 v$ og $v \leq_1 u$ etter alternativ I eller alternativ II.

a) Begge ulikhetene holder etter alternativ I, dvs. $u \leq v$ og $v \leq u$: Siden $\leq$ er antisymmetrisk, er $u = v$.

b) Den første ulikheten holder etter alternativ I og den andre etter alternativ II, dvs. $u \leq v$ og $v \leq x$, $y \leq u$: Bruker vi transitiviteten til $\leq$ på $y \leq v$, $u \leq v$ og $v \leq x$, får vi $y \leq x$. Dette er umulig siden x og y ikke er sammenlignbare, og viser at denne situasjonen aldri oppstår.

c) Den første ulikheten holder etter alternativ II og den andre etter alternativ I, dvs. $u \leq x$, $y \leq v$ og $v \leq u$: Bruker vi transitiviteten til $\leq$ på $y \leq v$, $v \leq u$ og $u \leq x$, får vi $y \leq x$. Dette er umulig siden x og y ikke er sammenlignbare, og viser at denne situasjonen aldri oppstår.

d) Begge ulikhetene holder etter alternativ II, dvs. $u \leq x$, $y \leq v$ og $v \leq x$, $y \leq u$: Bruker vi transitiviteten til $\leq$ på $y \leq u$ og $u \leq x$, får vi $y \leq x$. Dette er umulig siden x og y ikke er sammenlignbare, og viser at heller ikke denne muligheten oppstår.

Transitivitet: Anta at $u \leq_1 v$ og $v \leq_1 w$. For å vise at $u \leq_1 v$, må vi igjen drøfte fire forskjellige muligheter avhengig av om $u \leq_1 v$ og $v \leq_1 w$ etter alternativ I eller alternativ II.

a) Begge ulikhetene holder etter alternativ I, dvs. $u \leq v$ og $v \leq w$: Siden $\leq$ er transitiv, er $u \leq w$ og dermed $u \leq_1 w$.

b) Den første ulikheten holder etter alternativ I og den andre etter alternativ II, dvs. $u \leq v$ og $v \leq x$, $y \leq w$: Bruker vi transitiviteten til $\leq$ på $u \leq v$ og $v \leq x$, får vi $u \leq x$. Kombinert med $y \leq w$, gir dette $u \leq_1 w$.

c) Den første ulikheten holder etter alternativ II og den andre etter alternativ I, dvs. $u \leq x$, $y \leq v$ og $v \leq w$: Bruker vi transitiviteten til $\leq$ på $y \leq v$ og $v \leq w$, får vi $y \leq w$. Kombinert med $u \leq x$, gir dette $u \leq_1 w$.

d) Begge ulikhetene holder etter alternativ II, dvs. $u \leq x$, $y \leq v$ og $v \leq x$, $y \leq w$: Bruker vi transitiviteten til $\leq$ på $y \leq v$ og $v \leq x$, får vi $y \leq x$. Dette er umulig siden x og y ikke er sammenlignbare, og viser at denne muligheten aldri oppstår.

Dermed har vi vist at $\leq_1$ er en partiell ordning, og setningen følger. □

Vi kan nå vise det annonserte resultatet:

Teorem 2 *Dersom $\leq$ er en partiell ordning på en endelig mengde X, finnes det en total ordning som forfiner $\leq$.*

Bevis: Hvis $\leq$ er en total ordning, er det ingen ting å vise. Hvis ikke, finnes det to elementer x_1, y_1 som ikke er sammenlignbare, og ifølge setningen ovenfor finnes det en forfining $\leq_1$ av $\leq$ slik at $x_1 \leq y_1$. Hvis $\leq_1$ er en total ordning, er vi ferdig, hvis ikke finnes det to elementer x_2, y_2 som ikke er $\leq_1$-sammenlignbare. Ifølge setningen ovenfor kan vi finne en forfining $\leq_2$ av $\leq_1$ slik at $x_2 \leq_2 y_2$. Hvis denne ordningen er total, er vi ferdig, hvis ikke kan vi finne en forfining på samme måte som før osv. Siden X er endelig, finnes det bare endelige mange par (x, y), så før eller siden må prosessen stoppe opp fordi det ikke er flere ikke-sammenlignbare par igjen. Siden prosessen bare stopper når vi har nådd frem til en total ordning, har vi dermed vist at $\leq$ har en total forfining. □

Hvis vi forsøker å benytte beviset ovenfor på en uendelig mengde X, har vi ingen garanti for at prosessen stopper opp etter et endelig antall skritt, og det er derfor fristende å fortsette utover det endelig. Dette går an, men for å beholde kontrollen over prosessen, trenger vi kjennskap til en utvidet tallrekke, de såkalte *ordinaltallene*. Vi har ikke tid til å komme inn på disse her, så vi skal isteden se på en alternativ angrepsmåte basert på Zorns lemma.

Zorns lemma

Vi begynner med en viktig definisjon.

Definisjon 3 *Anta at $\preceq$ er en partiell ordning på en mengde Y. En ikke-tom delmengde C av Y kalles en* kjede *dersom den er totalt ordnet under $\preceq$ (dvs. at hvis $x, y \in C$, så er enten $x \preceq y$ eller $y \preceq x$).*

Husk også at hvis S er en delmengde av Y, så er $a \in Y$ en *øvre skranke* for S dersom $s \preceq a$ for alle $s \in S$. Et element $x \in X$ er *maksimalt* dersom det ikke finnes noen $y \in X$ slik at $x \prec y$.

Vi kan nå formulere Zorns lemma:

Teorem 4 (Zorns lemma) *Anta at $(Y, \preceq)$ er en partielt ordnet mengde. Dersom alle kjeder i Y har en øvre skranke, så har Y et maksimalt element.*

Vi skal komme tilbake til det (ganske vanskelige) beviset for Zorns lemma senere, men la oss prøve å få en følelse for hvorfor resultatet bør være sant: Start med en kjede C_1 i Y. Velg en øvre skranke til C_1, og en kjede C_2 som starter med dette elementet. Velg så en øvre skranke for denne kjeden, og en kjede C_3 som starter med dette elementet. Fortsetter vi på denne måten (kanskje "mer enn uendelig mange ganger"), må vi før eller senere gå tom for nye elementer. Alle kjedene vi nå har lager, danner til sammen en gigantkjede, og den øvre skranken til denne gigantkjeden er et maksimalt element. For å gjøre denne ideen presis (særlig ideen om å fortsette "mer enn uendelig mange ganger") trenger vi igjen ordinaltallene, og side vi ikke har dem til disposisjon, blir vi nødt til å organisere beviset litt annerledes.

Før vi ser på beviset, skal vi imidlertid se hvordan Zorns lemma kan brukes til å bevise en uendelig versjon av Teorem 2. Vi trenger en hjelpesetning som supplerer setning 1.

Setning 5 *Anta at C er en kjede av partiell ordninger på en mengde X (dvs. at hvert element i C er en partiell ordning på X, og hvis $\leq_1$ og $\leq_2$ er to ordninger i C, så er alltid en av dem en forfining av den andre). Da er unionen av alle ordningene i C en partiell ordning på X.*

Bevis: Unionen $\leq$ av alle ordningene i C er gitt ved

$$x \leq y \iff \text{det finnes } R \in C \text{ slik at } xRy$$

For å vise at $\leq$ er en partiell ordning, må vi vise at de tre kravene er oppfylt:

Refleksivitet: Siden xRx for alle $R \in C$, er $x \leq x$.

Antisymmetri: Anta at $x \leq y$ og $y \leq x$. Da finnes det relasjoner $R, S \in C$ slik at xRy og ySx. Siden C er en kjede, er den ene av ordningene R og S en forfining av den andre. Kall denne T. Da er xTy og yTx, og siden T er en partiell ordning, må $x = y$.

Transitivitet: Anta at $x \leq y$ og $y \leq z$. Da finnes det relasjoner $R, S \in C$ slik at xRy og ySz. Siden C er en kjede, er den ene av ordningene R og S en forfining av den andre. Kall denne T. Da er xTy og yTz, og siden T er en partiell ordning, må $x \leq z$. $\square$

Vi kan nå utvide teorem 2 til uendelige mengder.

Teorem 6 *Dersom $\leq$ er en partiell ordning på en mengde X, finnes det en total ordning som forfiner $\leq$.*

Bevis: La Y være alle partielle ordninger på X som er forfininger av $\leq$ (vi regner $\leq$ som en forfining av seg selv, så $\leq$ er med i Y). Inklusjon $\subseteq$ er en partiell ordning av Y. Vi skal bruke Zorns lemma på $(Y, \subseteq)$. Hvis C er en kjede av elementer i Y, så er unionen av alle elementer i C et element i Y ifølge setningen ovenfor. Denne unionen er åpenbart en øvre skranke for C, og følgelig er betingelsen i Zorns lemma oppfylt. Dette betyr at Y har et maksimalt element $\leq_{\max}$. Hvis $\leq_{\max}$ ikke var en total ordning, kunne vi ha brukt setning 1 til å utvide den til en finere ordning, noe som åpenbart er absurd. Altså er $\leq_{\max}$ en total ordning som forfiner $\leq$, og teoremet er bevist. $\square$

Bevis for Zorns lemma

I vår uformelle begrunnelse for hvorfor Zorns lemma er riktig, endte vi opp med en ”gigantkjede” som sikret oss et maksimalt element. Eksistensen av en slik gigantkjede er nøkkelen til resultatet, og den sikres av følgende resultat:

Teorem 7 (Hausdorffs maksimumsprinsipp) *I enhver partiell ordning finnes det en maksimal kjede (dvs. en kjede som ikke er inneholdt i noen annen kjede).*

Bevis for Zorns lemma fra Hausdorffs maksimumsprinsipp: La C være en maksimal kjede, og la a våre en øvre skranke for C. Da er a et maksimalt element i Y. Hvis ikke fantes det nemlig et element $b > a$, og i så fall ville $C \cup \{b\}$ være en kjede som er ekte inneholdt den maksimale kjeden C. $\square$

Der er altså nok å bevise Hausdorffs maksimumsprinsipp. For å gjøre dette trenger vi et mengdeteoretisk prinsipp som ikke kan utledes fra enklere regler:

Utvalgsaksiomet: *For enhver familie $\mathcal{A}$ av ikke-tomme mengder finnes det en funksjon $u : \mathcal{A} \to \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ slik at $u(A) \in A$ for alle $A \in \mathcal{A}$.*

Funksjonen u kalles en *utvalgsfunksjon* siden den for hver mengde $A \in \mathcal{A}$ velger ut et element $u(A) \in A$. Utvalgsaksiomet kan se uskyldig ut, men det har vært mye diskutert og kritisert. Én av grunnene til kritikken er at aksiomet postulerer eksistensen av en funksjon u uten å gi noen indikasjon på hvordan den kan konstrueres; en annen grunn er at utvalgsaksiomet har en del overraskende konsekvenser som mange finner kontra-intuitive. De fleste matematikere i dag aksepterer imidlertid utvalgsaksiomet (og dermed Zorns lemma og Hausdorffs maksimumsprinsipp).

La oss nå begynne på beviset for Hausdorffs maksimumsprinsipp: Hvis $(X, \leq)$ er den partielle ordningen, lar vi $\mathcal{X}$ våre mengden av alle kjeder i X (vi regner den “tomme kjeden” $\emptyset$ med til $\mathcal{X}$). For hver ikke-maksimal kjede C i $\mathcal{X}$, finnes det elementer $x \in X \setminus C$ slik at $C \cup \{x\}$ er en større kjede. Vi bruker utvalgsaksiomet til å plukke ut én slik x for hver ikke-maksimal kjede C, og setter $C^+ = C \cup \{x\}$. Dersom C er en maksimal kjede, setter vi $C^+ = C$.

Vi definerer nå en delmengde $\mathcal{N}$ av $\mathcal{X}$ ($\mathcal{N}$ er dermed også en samling av kjeder) til å være *lukket* dersom følgende betingelser er oppfylt:

(i) Hvis $C \in \mathcal{N}$, så er $C^+ \in \mathcal{N}$.

(ii) Hvis $\mathcal{C}$ er en samling av kjeder fra $\mathcal{N}$, så er $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$ i $\mathcal{N}$

Legg merke til at samlingen $\mathcal{Y}$ av alle kjeder er lukket. Det finnes også en minste lukket familie:

Lemma 8 *Snittet $\mathcal{M}$ av alle lukkede mengder $\mathcal{N}$ er selv lukket.*

Bevis: Vi må sjekke (i) og (ii) ovenfor. For å sjekke (i) antar vi at $C \in \mathcal{M}$. Da er C med i alle lukkede mengder, og følgelig er C^+ med i alle lukkede mengder, og dermed i $\mathcal{M}$. For å sjekke (ii), antar vi at $\mathcal{C}$ er en samling av kjeder fra $\mathcal{M}$. Da er $\mathcal{C}$ en samling av kjeder i enhver lukket $\mathcal{N}$. Følgelig er $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$ i $\mathcal{N}$ for alle lukkede $\mathcal{N}$, og dermed er $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$ i $\mathcal{M}$. □

Det er mengden $\mathcal{M}$ som kommer til å spille rollen som "gigantkjeden" vi har omtalt tidligere. Legg merke til at siden $\emptyset$ ikke er en lukket kjede, må $\mathcal{M}$ ha elementer. Det neste skrittet er å vise at $\mathcal{M}$ er en kjede. Til det trenger vi en definisjon og tre hjelpesetninger.

Definisjon 9 *En kjede C i $\mathcal{M}$ kalles* sammenlignbar *hvis den er sammenlignbar med alle $D \in \mathcal{M}$ (dvs. for alle $D \in \mathcal{M}$ har vi enten $C \subseteq D$ eller $D \subseteq C$).*

Den første hjelpesetningen er enkel:

Lemma 10 *Anta $C \in \mathcal{M}$ er sammenlignbar. Hvis $D \in \mathcal{M}$ og $D \subset C$ (vi krever altså at D er en* ekte *delmengde av C), så er $D^+ \subseteq C$.*

Bevis: Anta for motsigelse at vi *ikke* har $D^+ \subseteq C$. Siden C er sammenlignbar, er da $C \subset D^+$. Dermed er $D \subset C \subset D^+$, og det er umulig siden D^+ har høyst ett element mer enn D. □

Det neste lemmaet er litt vanskeligere:

Lemma 11 *Anta $C \in \mathcal{M}$ er sammenlignbar. For hver $D \in \mathcal{M}$ er da enten $D \subseteq C$ eller $D \supseteq C^+$.*

Bevis: La $\mathcal{N}$ våre samling av alle de $D \in \mathcal{M}$ som tilfredsstiller betingelse, dvs.

$$\mathcal{N} = \{D \in \mathcal{N} \mid D \subseteq C \text{ eller } D \supseteq C^+\}$$

For å vise at $\mathcal{N} = \mathcal{M}$ holder det å vise at $\mathcal{N}$ er lukket (husk at $\mathcal{M}$ er den *minste* lukkede mengden). Vi sjekker betingelsene (1) og (2):

Betingelse 1: Anta $D \in \mathcal{N}$. Vi må vise at $D^+ \in \mathcal{N}$. Siden $D \in \mathcal{N}$, er enten $D \subset C$, $D = C$ eller $D \supseteq C^+$. I det første tilfellet er $D^+ \subseteq C$ ifølge forrige lemma, i de andre to tilfellene er $D^+ \supseteq C^+$. Uansett er $D^+ \in \mathcal{N}$.

Betingelse 2: Anta $\mathcal{D}$ er en kjede av sammenlignbare mengder, og la $E = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} D$. Vi må vise at $E \in \mathcal{N}$. Dersom $D \subseteq C$ for alle $D \in \mathcal{D}$, er $E \subset C$, og følgelig er $E \in \mathcal{N}$. Dersom det finnes $D \in \mathcal{D}$ slik at $D \supseteq C^+$, så vil $E \subseteq C^+$, og følgelig er $E \in \mathcal{N}$ også i dette tilfellet. □

Det neste lemmaet får de siste brikkene på plass:

Lemma 12 *Alle elementer i $\mathcal{M}$ er sammenlignbare.*

Bevis: Vi skal følge strategien i forrige bevis: Siden $\mathcal{M}$ er den minste lukkede mengden, holder det å vise at familien $\mathcal{S}$ av alle sammenlignbare elementer er lukket. Igjen må vi sjekke betingelse (1) og (2).

Betingelse 1: Anta at C er sammenlignbar: vi må sjekke at C^+ også er det. Fra forrige lemma vet vi at hvis $D \in \mathcal{N}$, så er enten $D \subseteq C$ eller $D \supset C^+$. I begge tilfeller er C^+ sammenlignbar med D, og dermed er betingelse 1 oppfylt.

Betingelse 2: Anta $\mathcal{C}$ er en kjede av sammenlignbare mengder, og la $E = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$. Vi må vise at $E \in \mathcal{S}$, dvs. at hvis $D \in \mathcal{M}$, så er E og D sammenlignbare. Dersom $C \subset D$ for alle $C \in \mathcal{C}$, er $E \subseteq D$. Hvis ikke finnes det $C \in \mathcal{C}$ slik at $C \supseteq D$, og dermed er $E \supseteq D$. I begge tilfeller er E og D sammenlignbare. □

Bevis for Hausdorffs maksimumsprinsipp: Siden alle elementer i $\mathcal{M}$ er sammenlignbare, er $\mathcal{M}$ en kjede, og siden $\mathcal{M}$ er lukket, er $M = \bigcup_{D \in \mathcal{M}} D$ et element i $\mathcal{M}$. Bruker vi igjen at $\mathcal{M}$ er lukket, ser vi at $M^+ \in \mathcal{M}$, og det er bare mulig hvis $M = M^+$, dvs. hvis M er en maksimal kjede. Altså eksisterer det maksimale kjeder. □

Vi har allerede vist at Hausdorffs maksimumsprinsipp impliserer Zorns lemma, og beviset er dermed fullført.

Utvalgsaksiomet spilte en tilsynelatende beskjeden rolle i beviset ovenfor, men det viser seg at bidraget derfra er umulig å komme utenom. En måte å vise dette på, er å bruke Zorns lemma til å bevise utvalgsaksiomet. Vi skal gjøre dette i oppgave 1 nedenfor.

Oppgaver

1. I denne oppgaven skal vi utlede utvalgsaksiomet fra Zorns lemma. Anta at $\mathcal{A}$ er en familie av ikke-tomme mengder. En *partiell utvalgsfunksjon* er en funksjon $u : D_u \to \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ fra en delmengde D_u av $\mathcal{A}$ slik at $u(B) \in B$ for all $B \in D_u$. Vi definerer en relasjon på mengden $\mathcal{U}$ av alle utvalgsfunksjoner ved

$$u \leq v \iff D_u \subseteq D_v \text{ og } u(B) = v(B) \text{ for alle } B \in D_u$$

a) Vis at $\leq$ er en partiell ordning på $\mathcal{U}$.

b) Vis at enhver kjede i $(\mathcal{U}, \leq)$ har en øvre skranke.

c) Bruk Zorns lemma til å forklare at det finnes et maksimalt element og vis at dette er en utvalgsfunksjon for $\mathcal{A}$.

2. Vi skal bruke Zorns lemma til å vise at hvis A og B er to mengder, så er enten $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$ eller $\text{card}(B) \leq \text{card}(A)$.

a) Forklar at det er nok å vise at dersom det ikke finnes en injektiv funksjon fra B til A, så må det finnes en injektiv funksjon fra A til B.

I resten av oppgaven antar vi at det ikke finnes en injektiv funksjon fra B til A. Vi lar $\mathcal{I}$ være mengden av alle injektive funksjoner $u : D_u \to B$ fra en delmengde D_u av $\mathcal{A}$ til B, og vi definerer en relasjon på $\mathcal{I}$ ved

$$u \leq v \iff D_u \subseteq D_v \text{ og } u(B) = v(B) \text{ for alle } B \in D_u$$

b) Vis at $\leq$ er en partiell ordning på $\mathcal{I}$

c) Vis at enhver kjede i $(\mathcal{U}, \leq)$ har en øvre skranke.

d) Bruk Zorns lemma til å forklare at ordningen har et maksimalt element, og vis at dette er en injektiv funksjon fra A til B. Forklar hvorfor vi nå har vist at hvis A og B er to mengder, så er enten $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$ eller $\text{card}(B) \leq \text{card}(A)$.

3) I lineær algebra arbeider man med basiser for endeligdimensjonale vektorrom. Vi skal bruke Zorns lemma til å vise at også alle uendeligdimensjonale vektorrom har en basis. Vi antar at V er et vektorrom over $\mathbb{R}$, og at E er en (muligens uendelig) delmengde av V. En *lineær kombinasjon fra E* er en sum

$$\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \cdot + \alpha_n \mathbf{e}_n$$

der $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ er endelig mengde elementer i E og $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Vi sier at E er *lineært uavhengig* dersom en lineærkombinasjon

$$\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \cdot + \alpha_n \mathbf{e}_n$$

fra E bare kan være lik $\mathbf{0}$ dersom $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Vi lar $\mathcal{U}$ være mengden av lineært uavhengig delmengder av V og ordner $\mathcal{U}$ ved inklusjon $\subseteq$.

a) Vis at alle kjeder i $(\mathcal{U}, \subseteq)$ har en øvre skranke i $\mathcal{U}$.

b) Bruk Zorns lemma til å vise at $\mathcal{U}$ må ha et maksimalt element E_{max}.

c) Vis et ethvert element $\mathbf{v} \in V$ kan skrives som en lineærkombinasjon

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \cdot + \alpha_n \mathbf{e}_n$$

av elementer $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \in E_{\max}$. Dette viser at $E_{\max}$ er en såkalt *Hamel-basis* for V. (Det finnes også en annen type basiser i uendelig-dimensjonale vektorrom, *Schauder-basiser*, men de forutsetter at vektorrommet er utstyrt med en norm.

4. En *velordning* av en mengde X er en total ordning $\leq$ på X der hver mengde har et minste element (for hver delmengde A av X finnes det altså et element $m \in A$ slik at $m \leq a$ for alle $a \in A$). I denne oppgaven skal vi bruke Zorns lemma til å vise at enhver mengde har en velordning.

   Vi lar $\mathcal{X}$ bestå av alle par $(A, \leq)$ der A er en delmengde av X og $\leq$ er en velordning av A. Hvis $a \in A$, definerer vi det *initielle segmentet* $(A_a, \leq_a)$ ved å sette $A_a = \{b \in A : b < a\}$ og la $\leq_a$ være restriksjonen av $\leq$ til A_a (rekkefølgen i de to ordningene $\leq_a$ og $\leq$ er altså akkurat den samme, bortsett fra at $\leq_a$ bare sammenligner elementer som hører med i A_a.) Vi definerer en partiell ordning $\preceq$ på $\mathcal{X}$ ved å si at $\leq_1 \preceq \leq_2$ dersom de to ordningene er like eller $\leq_1$ er et initielt segment av $\leq_2$.

   a) Vis at $\preceq$ er en partiell ordning.

   b) Vis at dersom $\leq$ er en velordning på A og at $a \in X \setminus A$, så kan vi lage en velordning på $A \cup \{a\}$ ved å legge til a som et største element.

   c) Vis at enhver kjede i $\mathcal{X}$ har en øvre skranke.

   d) Vis at $\mathcal{X}$ har et maksimalt element og at dette er en velordning av X.