§4.3 | 1 | For $i \in \mathbb{Z}^+$ $A_i := (-i, i)$ intervall $\subseteq \mathbb{R}$

a) Finn $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ og $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \mathbb{R}$ $\bigcap_{i=1}^{\infty} = (-1, 1)$

b) Vil vise at begge sider er inneholdt i hverandre.

Automatisk er $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq \mathbb{R}$

Må vise $\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

Ta vilkårlig $x \in \mathbb{R}$. Vil vise at $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Det finnes et tall $k \in \mathbb{Z}^+$ slik at $k > |x|$.

Da vil $x \in (-k, k) = A_k$ så $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

Dermed er $\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ og $\mathbb{R} = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

$(-1,1) = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$: Observer at $A_i = (-i, i) \supset A_1 = (-1, 1)$ for alle i.

$(-1, 1) \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$

Ta $x \in (-1, 1)$. Siden $(-1, 1) \subseteq (-i, i) = A_i$ må $x \in (-i, i)$ for alle i. Så $x \in A_i$ for alle i, så $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$

$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq (-1, 1)$: Ta $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$. Da ligger $x \in A_i$ for alle i. Så spesielt ligger $x \in A_1 = (-1, 1)$.

Har vist begge inneholdsrelasjonene så $(-1, 1) = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$

10) La $\{A_i \mid i \in \mathbb{Z}^+\}$ være Familie mengder.

(a) Anta $A_i \subseteq A_{i+1}$ for alle i. Vis $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1$

$\underline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq A_1}$: $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ så er $x \in A_i$ for alle i.

Så $x \in A_1$.

$\underline{A_1 \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i}$: Ta $x \in A_1$. Siden $A_i \subseteq A_{i+1}$ for alle i så vil $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots \subseteq A_i \subseteq A_{i+1} \subseteq \dots$

Dermed vil $A_1 \subseteq A_i$ for alle i.

Så da må $x \in A_i$ for alle i.

Så $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

Dermed er $A_1 = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$

10b) $\{A_i \mid i \in \mathbb{Z}^+\}$ og anta $A_{i+1} \subseteq A_i$ for alle i.

Vise at $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1$

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq A_1$: Ta $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Det finnes en k slik at $x \in A_k$. Vi har

$$A_k \subseteq A_{k-1} \subseteq A_{k-2} \subseteq \dots \subseteq A_2 \subseteq A_1$$

Så $A_k \subseteq A_1$. Dermed er $x \in A_1$.

$A_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$: Ta $x \in A_1$ så ligger den per definisjon i minst en A_i, så $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

§5.3 | 2 | $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$$f(n) = \begin{cases} n-1 & n \text{ partall} \\ n+3 & n \text{ oddetall} \end{cases}$$

Vis at f er bijektiv.

f er bijektiv viss f er injektiv og f er surjektiv.

f er injektiv viss $f(n)=f(m)$ medfører det $n=m$.

f er surjektiv dersom ran(f) er hele $\mathbb{Z}$.

f injektiv: Antar $f(n)=f(m)$. Vil vise $n=m$.

Flere tilfeller: n, m partall
$$f(n) = f(m)$$
$$n-1 = m-1$$
$$n = m$$

n par, m odde
$$f(n) = f(m)$$
$$n-1 = m+3$$

Siden n er partall er $n-1$ oddetall. Siden m er oddetall er $m+3$ partall. Så dermed kan ikkje $f(n)=f(m)$ i dette tilfellet.
Så sant i dette tilfellet.

n odd, m par $\rightsquigarrow$ samme argument med m og n bytte.

n, m oddetall:
$$f(n) = f(m)$$
$$n+3 = m+3 \quad | -3$$
$$n = m$$

Så $f(n)=f(m)$ medfører $n=m$ så f er injektiv.

Surjektiv Vil vise $\mathbb{Z} = \text{ran}(f) = \{k \in \mathbb{Z} \mid \exists n \in \mathbb{Z} \text{ med } f(n)=k\}$

$\text{ran}(f) \subseteq \mathbb{Z}$ er sant per definisjon.

$\mathbb{Z} \subseteq \text{ran}(f)$: Ta $k \in \mathbb{Z}$.

Viss k er partall, så ser vi at dersom n skal oppfylle $f(n)=k$ så må n være oddetall, siden f anvendt på partall gir $n-1$ som er oddetall.

$$f(n) = n+3 = k$$

Ser at n må være lik $k-3$. Siden k er partall så er $k-3$ oddetall, så $f(k-3) = k-3+3 = k$.

Viss k er oddetall, så ser vi at viss $f(n)=k$ må n være partall, siden f anvendt på oddetall gir ut partall.

$$f(n) = n-1 = k$$

Så n må være lik $k+1$. og $k+1$ er partall

så $f(k+1) = k+1-1 = k$.

Så $\mathbb{Z} \subseteq \text{ran}(f)$ så $\mathbb{Z} = \text{ran}(f)$ så f er surjektiv.

Dermed er f bijektiv, siden den er injektiv & surjektiv.

§5.1 | 2 | I hver deloppgave finn ut:
i) er f 1-1 (injektiv)
ii) er f på (surjektiv)
iii) er f invertibel? Isåfall finn f^{-1}.

(a) Er funksjonen fra §5.3 oppg 7:
$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$$f(n) = \begin{cases} n-1 & n \text{ jevn} \\ n+3 & n \text{ odde} \end{cases}$$

Vi viste at f er bijektiv. Så i) Ja
ii) Ja

Siden f er bijektiv så finnes en invers f^{-1}.

Sett $f(n) = m$

Vi har uttrykt m ved hjelp av n. Vil istede uttrykke n ved hjelp av m:

<u>n jevn:</u> $f(n) = m = n-1$
Ser at $n = m+1$, m oddetall

<u>n odde:</u> $f(n) = m = n+3$
$n = m-3$, m partall

Kandidat til invers

$$g(m) = \begin{cases} m+1 & m \text{ odde} \\ m-3 & m \text{ par} \end{cases}$$

For å sjekke at det er riktig, så sjekker vi at
<u>$f(g(m)) = m$ og $g(f(n)) = n$:</u>

$$f(g(m)) = f\begin{pmatrix} m+1 & m \text{ odde} \\ m-3 & m \text{ par} \end{pmatrix} = \begin{cases} m+1-1 & m \text{ odde} \\ m-3+3 & m \text{ par} \end{cases}$$

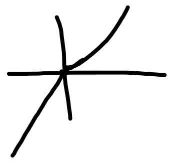
$= m$

$$g(f(n)) = g\begin{pmatrix} n-1 & n \text{ par} \\ n+3 & n \text{ odde} \end{pmatrix} = \begin{cases} n-1+1 & n \text{ par} \\ n+3-3 & n \text{ odde} \end{cases} = n$$

Dermed er $g = f^{-1}$.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases}$$



(i) Anta $f(x) = f(y)$.

Viss $x \geq 0$ og $y < 0$ så er $f(x) = x^2 \geq 0$

$f(y) = 2y < 0$

så de kan aldri bli like.

Viss både x og $y \geq 0$:

$$f(x) = f(y)$$
$$x^2 = y^2$$

Så $x = \pm y$. Men vi antok $y \geq 0$ så $x = y$

Både x og $y < 0$:

$$f(x) = f(y)$$
$$2x = 2y$$

Så $x = y$ (dele på 2)

Så f er 1-1.

(ii) Ta $y \in \mathbb{R}$. Vil finne $x \in \mathbb{R}$ slik at $f(x) = y$.

<u>Viss $y \geq 0$:</u> Viss $f(x) = y$ så må $x \geq 0$ så

$$x^2 = y$$

så vi kan velge $x = \sqrt{y}$. Da er $f(x) = \sqrt{y}^2 = y$

<u>Viss $y < 0$:</u> Viss $f(x) = y$ så må $x < 0$. Så

$f(x) = 2x = y$. så $x = \frac{y}{2}$ funker.

Dermed kan vi få alle tall, så f er surjektiv

(iii) Vi vet det må finnes inversfunksjon.

Sett $y = f(x)$ $\quad y = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases}$

<u>Viss $x \geq 0$</u> $\quad y = x^2$ så $x = \sqrt{y}$

<u>Viss $x < 0$</u> $\quad y = 2x$ så $x = \frac{y}{2}$

$$g(y) = \begin{cases} \sqrt{y} & y \geq 0 \\ \frac{y}{2} & y < 0 \end{cases}$$

<u>Sjekk:</u>

$$f(g(y)) = f\begin{pmatrix} \sqrt{y} & y \geq 0 \\ \frac{y}{2} & y < 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} \sqrt{y}^2 & y \geq 0 \\ 2 \cdot \frac{y}{2} & y < 0 \end{cases} = y$$

$$g(f(x)) = g\begin{pmatrix} x^2 & x \geq 0 \\ 2x & x < 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} \sqrt{x^2} & x \geq 0 \\ \frac{2x}{2} & x < 0 \end{cases} = x$$

Så $g = f^{-1}$.

(c) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$$f(n) = \begin{cases} n+1 & \text{par} \\ 2n & \text{odde} \end{cases}$$

i) Anta $f(n) = f(m)$. Ser at n og m må ha samme paritet.

n, m par: $f(n) = f(m)$

$$n+1 = m+1$$

Så $n = m$

n, m odde: $f(n) = f(m)$

$$2n = 2m$$

Så $n = m$

Så f er 1-1.

ii) Ser at alle partall i $ran(f)$ er på formen $n = 2k$ der k oddetall. Men $k = 2m+1$ så

$$n = 2k = 2(2m+1) = 4m+2$$

Så alle partall i $ran(f)$ er på formen $4m+2$.

F.eks 4 er ikke på denne formen, så f er ikke surjektiv.

iii) Siden f ikke er surjektiv er den heller ikke bijektiv. Dermed heller ikke invertibel.

d) $f(n) = \begin{cases} 2n+1 & \text{par} \\ n+3 & \text{odde} \end{cases}$

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

i) Ser at viss $f(n) = f(m)$ må n og m ha samme paritet.

<u>n, m par:</u> $f(n) = f(m)$

$$\begin{array}{ccc} f(n) & = & f(m) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ 2n+1 & = & 2m+1 \end{array}$$

så $2n = 2m$

$n = m$

<u>n, m odde:</u>

$$\begin{array}{ccc} f(n) & = & f(m) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ n+3 & = & m+3 \end{array}$$

så $n = m$

Dermed er f injektiv.

ii) Ser at alle oddetallene vi får ut av f er på formen $k = 2n+1$ der n er partall. Skriv $n = 2m$ så $k = 2n+1 = 2(2m)+1 = 4m+1$

Siden f.eks 3 ikke er på denne formen, er f ikke surjektiv.

§5.5 / 6) X, Y mengder, $A \subseteq X$ $f : X \to Y$

ⓐ Vis at $A \subseteq f^{-1}(f[A])$

$f[A] = \{ f(a) \mid a \in A \}$

$f^{-1}(B) = \{ x \in X \mid f(x) \in B \}$

$$f^{-1}(f[A]) = \{ x \in X \mid f(x) \in f[A] \}$$
$$= \{ x \in X \mid f(x) = f(a) \text{ for en } a \in A \}$$
$$= \{ x \in X \mid \exists a \in A \text{ med } f(a) = f(x) \}$$

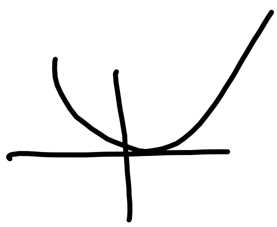
Vil vise $A \subseteq f^{-1}(f[A])$

Ta $x \in A$. Da eksisterer $a \in A$ med $f(a) = f(x)$, fordi du kan ta $a = x$.

ⓑ Finn eksempel der $A \neq f^{-1}(f[A])$

$X = \mathbb{R}$ $Y = \mathbb{R}$ $A = [0,1]$

$f : X \to Y$
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = x^2$



$f[0,1] = [0,1]$

$f^{-1}(f[0,1]) = f^{-1}([0,1]) = \{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [0,1] \}$
$= [-1,1]$

Så $A = [0,1] \neq f^{-1}f[A] = [-1,1]$

8) X, Y mengder $A, B \subseteq X$ $f : X \to Y$ injektiv.
Vise at $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$
$f[A \cap B] \subseteq f(A) \cap f(B)$
Ta $x \in f[A \cap B]$. Da er $x = f(y)$ der $y \in A \cap B$.
Da er $f(y) \in f(A)$ og $f(y) \in f(B)$ per definisjon.
så $y \in f[A] \cap f[B]$.
$f[A] \cap f[B] \subseteq f[A \cap B]$:

Ta $x \in f[A] \cap f[B]$. Da finnes $a \in A$, $b \in B$
med $x = f(a) = f(b)$
Siden f er injektiv så må $a = b$. Dermed
er $a = b \in A \cap B$. Så $x \in f[A \cap B]$.