Ekvivalensrelasjoner

Def. La A være en mengde og R en relasjon på A. R er en ekvivalensrelasjon dersom den er refleksiv, symmetrisk og transitiv.

Notasjon. Når R er en ekvivalensrelasjon på A bruker vi ofte symbolet $\sim$:

$$x \sim y \iff x R y \iff (x,y) \in R \subseteq A \times A.$$

Eksempel $A = \{\text{studenter som tar MAT1140}\}$

$\forall x, y \in A \quad x \sim y \iff x$ og y har samme bursdag.

Refleksiv: x har samme bursdag som x

Symmetrisk: Hvis Ola har samme bursdag som Kari, så har Kari samme bursdag som Ola.

Refleksiv: Hvis Ola har samme bursdag som Kari
og Kari ——— " ——— Elisabeth
så Ola ——— " ——— Elisabeth.

Eksempel La X være en mengde. Da er $=$ en ekvivalensrelasjon på X.

<u>Eksempel</u>. La $n \in \mathbb{N}$, og la $\equiv_n$ være relasjonen på $\mathbb{Z}$ gitt ved

$$m \equiv_n k \iff n \mid (m-k).$$

Da er $\equiv_n$ en ekvivalensrelasjon.

<u>Eksempel</u>. La $\leq$ være den vanlige ordensrelasjonen på $\mathbb{N}$. Hvis $\leq$ var en ekvivalensrelasjon hadde vi hatt $m \leq n \Rightarrow n \leq m$. Så $\leq$ er <u>ikke</u> en ekvivalensrelasjon på $\mathbb{N}$.

<u>Def</u>. La $\sim$ være en ekvivalensrelasjon på en mengde $A \neq \emptyset$. Hvis $a \in A$ er <u>ekvivalensklassen</u> til a mengden

$$[a] = \{x \in A : x \sim a\}.$$

$A/\sim$: mengden av ekvivalensklasser

(Altså $A/\sim \; = \{[a] : a \in A\}$)

<u>Eksempel</u>. La A være mengden av studenter som tar MAT1140, og la $\sim$ være bursdagsrelasjonen. Hvis Ola $\in A$, så er [Ola] delmengden av studenter som har samme bursdag som Ola.

Eksempel Husk at $\equiv_2$ er ekvivalensrelasjonen på $\mathbb{Z}$ gitt ved

$$m \equiv_2 n \iff 2 \mid (m-n)$$

Da er $\mathbb{Z}/\equiv_2 = \{[0],[1]\}$:

Hvis $0 \equiv_2 n$ har vi $2 \mid n$. Så n er et partall.

Hvis $1 \equiv_2 n$ har vi $2 \mid (n-1) \Rightarrow n = 2k+1$ for en $k \in \mathbb{Z}$, så n er et oddetall.

Så $[0] = \{n \in \mathbb{Z} : 0 \equiv_2 n\} = \{\text{partall}\}$

og $[1] = \{n \in \mathbb{Z} : 1 \equiv_2 n\} = \{\text{oddetall}\}$.

$\Rightarrow$ Vi kan ikke ha flere ekvivalensklasser.

Generelt: $\mathbb{Z}/\equiv_n = \{[0],[1],\ldots,[n-1]\}$.

Def. En partisjon av en mengde $A \neq \emptyset$, er en delmengde $P \subseteq P(A)$ slik at

(i) $\forall\, B \in P$, $B \neq \emptyset$

(ii) $\forall\, B, C \in P$, $B \cap C = \emptyset$ or $A = B$.

(iii) $\forall\, a \in A$, $\exists\, B \in P$ s.a. $a \in B$.

<u>Teorem.</u> (1) La $\sim$ være en ekvivalensrelasjon på en mengde $A \neq \emptyset$. Da er $A/\sim$ en partisjon.

(2) Hvis P er en partisjon av en mengde A, så definerer

$$\forall x,y \in A \left[x \sim y \iff \exists\, B \in P \text{ s.a. } x,y \in B. \right]$$

en ekvivalensrelasjon på A.

<u>Bevis.</u> 1.) (i) La $[x] \in A/\sim$. Da er $x \in [x]$, så $[x] \neq \emptyset$.

(ii) Hvis $[x], [y] \in A/\sim$, og $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, så finnes $z \in A$ s.a. $x \sim z$ og $z \sim y$. Men da har vi (ved transitivitet) at $x \sim y$. Så $[x] = [y]$. (Oppgave: Vis at $x \sim y \Rightarrow [x] = [y]$)

(iii) Hvis $x \in A$, så er $x \in [x]$.

2) <u>Refleksiv.</u> Opplagt.

<u>Symmetrisk.</u> Anta $x \sim y$. Da $\exists\, B \in P$ s.a. $x, y \in B$. Men det er det samme som $y \sim x$.

<u>Transitiv:</u> Anta $x \sim y$ og $y \sim z$. Da finnes $B, C \in P$ s.a. $x, y \in B$ og $y, z \in C$. Men da er $y \in B \cap C$. Så $B \cap C \neq \emptyset \Rightarrow B = C$ ved definisjon av partisjon. $\blacksquare$