Relasjoner

<u>Def.</u> La A og B være mengder. En <u>relasjon</u> på $A \times B$ er en delmengde $R \subseteq A \times B$.

Hvis $A = B$, altså $R \subseteq A \times A$, sier vi at R er en relasjon på A.

<u>Notasjon</u>: Vi skriver

$$x \, R \, y \quad (\text{eller } R(x,y)) \quad \text{hviss } (x,y) \in R.$$

<u>Eksempel</u>: La $R = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \exists p \in \mathbb{N} \;\; x = y + p$

Da er $x R y$ det samme som $x \geq y$.

<u>Def.</u> En relasjon $R \subseteq A \times A$ kalles

(i) refleksiv dersom $\forall x \in A \quad x R x$

(ii) symmetrisk dersom $\forall x, y \in A \quad x R y \iff y R x$

(iii) antisymmetrisk dersom

$$\forall x, y \in A \quad (x R y \wedge y R x) \Rightarrow x = y$$

(iv) transitiv dersom

$$\forall x, y, z \in A \quad (x R y \wedge y R z) \Rightarrow x R z.$$

(i) (iii) (iv)

<u>Def.</u> En refleksiv, antisymmetrisk og transitiv relasjon på en mengde A kalles en <u>orden</u>.

Dersom R er en relasjon på A ($R \subseteq A \times A$), så kalles R en <u>total</u> <u>orden</u> dersom

- R er en orden, og
- $\forall x, y \in A \quad xRy \lor yRx$

x og y er "sammenlignbare"

<u>Eksempel</u>. $R = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \exists p \ \ x = y + p\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

er en orden.

Bevis: La oss skrive $x \geq y$ for xRy. Vi sjekker at $\geq$ oppfyller (i), (iii) og (iv).

(i): For alle $m \in \mathbb{N}$ er $m + 0 = m$.
Så $m \leq m$.

(iii): Anta at $x \geq y$ og $y \geq x$.
Altså $\exists \ p, q \in \mathbb{N}$ s.a.

$$x = y + p \quad \text{og} \quad y = x + q.$$

$\Rightarrow x = x + p + q \quad \Rightarrow p + q = 0.$

$\Rightarrow p = q = 0$ (Hvis $q \neq 0$, finnes $n \in \mathbb{N}$ s.a. $S(n) = q$. Dermed har vi $0 = p + q = p + S(n) = S(p+n)$, som er en motsigelse av Peanos aksiomer. Så $q = 0$ og $p = 0$.)

(iv): Anta at $x, y, z \in \mathbb{N}$ og $x \geq y$, $y \geq z$.

Da finnes $p, q \in \mathbb{N}$ s.a. $x = y + p$, $y = z + q$.

$\Rightarrow x = z + p + q \quad \Rightarrow x \geq z$

<u>Def.</u> La A være en mengde med en orden $\leq$.
$a \in A$ kalles et <u>minste element</u> dersom

$$\forall b \in A \quad a \leq b.$$

[redacted]

<u>Eksempel</u> (en annen type orden). La U være en mengde. Da er $\subseteq$ en orden på $P(U)$ (sjekk!). Her er $\emptyset$ minste element, og U største element. Merk at $P(U) \setminus \{\emptyset\}$ ikke nødvendigvis har et minste element. (Man kan likevel ha <u>minimale</u> elementer (se Notat 5.)

<u>Eksempel.</u> La $A = \{a, b, c\}$. Da er $\subseteq$ på $P(A)$ ikke total! For eksempel har vi hverken $\{a\} \subseteq \{b\}$ eller $\{b\} \subseteq \{a\}$ (Med mindre $a = b$)

<u>Oppgave.</u> La A være en mengde, og $\mathcal{E}$ være mengden av endelige delmengder av A. La $\preceq$ være relasjonen definert ved

$$\forall B, C \in \mathcal{E} \quad B \preceq C \iff |B| \leq |C|.$$

Er dette en orden? ($|B|$ = antall elementer i B)

Teorem. $\mathbb{N}$ er velordnet: Enhver ikke-tom delmengde av $\mathbb{N}$ har et minste element.

Notasjon: $n > m \iff (n \geq m) \wedge (n \neq m)$.

Lemma. $\forall\, n, m \in \mathbb{N} \quad n > m \Rightarrow n \geq S(m)$.

Bevis. Anta $n > m$. Da finnes $p \in \mathbb{N}$, $p \neq 0$ slik at $n = m + p$. Siden $p \neq 0$, finnes $q \in \mathbb{N}$ s.a. $S(q) = p$. Så

$$n = m + p = m + S(q) = S(m) + q,$$

som betyr at $n \geq S(m)$. ▨

Bevis for teoremet. La $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$, og anta at A ikke har et minste element. La

$$P(n) : \forall\, m \in A \quad m \geq n.$$

Vi har $P(0)$, siden $\forall\, m \in \mathbb{N}$, $m \geq 0$.

Anta nå at vi har $P(n)$. Hvis $n \in A$, medfører $P(n)$ at n er et minste element i A. Så $n \notin A$, og $\forall\, m \in A$, $m > n$. Ved lemmaet får vi at

$\forall\, m \in A$, $m \geq S(n) \iff P(S(n))$.

Ved induksjon har vi altså $\forall k \in \mathbb{N}\ P(k)$.

Siden $A \neq \emptyset$ kan vi ta $k \in A$, og $P(k+1)$ gir oss

$$k \geq k+1.$$

Ved antisymmetri

Men vi har også $k+1 \geq k$, så $k = k+1$.

$\Rightarrow\ 0 = 1 \ \Leftrightarrow\ 0 = S(0)$ Motsigelse!

Konklusjon: $A = \emptyset$ eller A har et minste element. $\blacksquare$

En måte å tenke på beviset for at $\mathbb{N}$ er velordnet er som følger:

Hvis $A \subseteq \mathbb{N}$ ikke har et minste element, så må vi ha $0 \notin A$ (siden 0 er minste element i $\mathbb{N}$). Men da er $A \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Med samme argumentasjon må $A \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ osv.

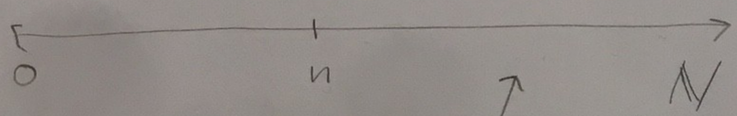
I første del av beviset over viser vi ved induksjon at $\forall n \in \mathbb{N}\ A \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0, 1, \ldots, n\}$.

Altså er $A \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{N} \setminus \{0, 1, \ldots, n\} = B$.

I andre del av beviset viser vi at $B = \emptyset$.

Så $A = \emptyset$.

Tegning:



A må være her for alle n.

"Til slutt er det ikke mer plass".