16. september 2020

MAT1140 — Strukt. Arg.

Obligatorisk oppgave 1 av 2

Innleveringsfrist

Torsdag 01. oktober 2020, klokken 14:30 i Canvas (canvas.uio.no).

Instruksjoner

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og oblignummer.

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Husk å inkludere alle relevante plott og figurer. Studenter som ikke får sin opprinnelige besvarelse godkjent, men som har gjort et reelt forsøk på å løse oppgavene, vil få én mulighet til å levere en revidert besvarelse. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

I oppgaver der du blir bedt om å programmere må du legge ved programkoden og levere den sammen med resten av besvarelsen. Det er viktig at programkoden du leverer inneholder et kjøreeksempel, slik at det er lett å se hvilket resultat programmet gir.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) i god tid før innleveringsfristen.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

LYKKE TIL!

Oppgave 1. La P og Q være utsagnsvariabler. Bestem om følgende er en tautologisk ekvivalens:

$$(P \implies (P \implies Q)) \iff (P \implies Q). \tag{1}$$

Vi har at :

$$\begin{aligned}
(P \implies (P \implies Q)) &\iff (\neg P \lor (\neg P \lor Q)), && (2)\\
&\iff ((\neg P \lor \neg P) \lor Q), && (3)\\
&\iff (\neg P \lor Q), && (4)\\
&\iff (P \implies Q). && (5)
\end{aligned}$$

Dermed har vi en tautologisk ekvivalens.

Oppgave 2. La U være en mengde og la P være en egenskap. Anta at:

$$\exists x \in U \quad \neg P(x). \tag{6}$$

Gi et motsigelsesbevis for:

$$\neg \forall x \in U \quad P(x). \tag{7}$$

Fra hypotesen, velg $y \in U$ slik at $\neg P(y)$. Anta for motsigelse at $\forall x \in U \quad P(x)$. Spesielt får vi $P(y)$. Da har vi motsigelsen $\neg P(y) \land P(y)$. Dermed $\neg \forall x \in U \quad P(x)$.

Oppgave 3. La U være en mengde og la $(A_i)_{i \in I}$ og $(B_j)_{j \in J}$ være to familier delmengder av U. Merk at følgende er en familie delmengder av U:

$$(A_i \cap B_j)_{(i,j) \in I \times J}. \tag{8}$$

Vis at:

$$(\bigcup_{i \in I} A_i) \cap (\bigcup_{j \in J} B_j) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (A_i \cap B_j). \tag{9}$$

La x være et objekt.
– Anta at vi har:

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \cap \bigcup_{j \in J} B_j. \tag{10}$$

Da får vi:

$$(\exists i \in I \quad x \in A_i) \wedge (\exists j \in J \quad x \in B_j). \tag{11}$$

Velg da $i_0 \in I$ slik at $x \in A_{i_0}$ og $j_0 \in J$ slik at $x \in B_{j_0}$.
Da har vi $(i_0, j_0) \in I \times J$ og at $x \in A_{i_0} \cap B_{j_0}$ dermed:

$$x \in \bigcup_{(i,j) \in I \times J} A_i \cap B_j. \tag{12}$$

– Anta nå at vi har :

$$x \in \bigcup_{(i,j) \in I \times J} A_i \cap B_j. \tag{13}$$

Velg da $(i_0, j_0) \in I \times J$ slik at $x \in A_{i_0} \cap B_{j_0}$. Da har vi:

$$x \in A_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i, \tag{14}$$

$$x \in B_{j_0} \subseteq \bigcup_{j \in J} B_j. \tag{15}$$

Dermed:

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \cap \bigcup_{j \in J} B_j, \tag{16}$$

Oppgave 4. La A være en mengde, som godt kan være tom. I denne oppgaven ser vi på noen ekstremtilfeller av avbildningsbegrepet.

(i) Finn den eneste avbildningen fra $\emptyset$ til A, ved å beskrive dens graf.

La G være grafen til en slik avbildning. Da må $G \subseteq \emptyset \times A$. Dermed $G = \emptyset$. Man ser at dette er grafen til en avbildning.

(ii) Finn den eneste avbildningen fra A til $\{\emptyset\}$.

La f være en avbildning fra A til $\{\emptyset\}$. Vi har da nødvendigvis, for alle $x \in A$, at $f(x) = \emptyset$. Dette karakteriserer en avbildning fra A til $\{\emptyset\}$.

Oppgave 5. La A og B være mengder og la $f : A \to B$ være en avbildning.

(i) Anta at f er injektiv. Anta at C er en mengde og at $g : C \to A$ og $h : C \to A$ er avbildninger. Anta at $f \circ g = f \circ h$. Vis at $g = h$.

> Anta $x \in C$. Vi har at $f(g(x)) = f(h(x))$. Ved injektivitet av f får vi $g(x) = h(x)$. Siden dette gjelder for alle $x \in C$ får vi $g = h$.

(ii) Anta at for alle mengder C og for alle avbildninger $g : C \to A$ og $h : C \to A$ har vi:

$$f \circ g = f \circ h \implies g = h. \tag{17}$$

Vis at f er injektiv (man kan innføre passende valg av g og h).

> Anta at $x, x' \in A$ og at $f(x) = f(x')$. La y være et objekt, sett $C = \{y\}$ og la $g : C \to A$ og $h : C \to A$ være definert ved at $g(y) = x$ og $h(y) = x'$. Vi har da at $f \circ g(y) = f(x) = f(x') = f \circ h(y)$. Dermed $f \circ g = f \circ h$. Dermed $g = h$. Da får vi $x = g(y) = h(y) = x'$.

(iii) Anta at f er surjektiv. Anta at C er en mengde og at $g : B \to C$ og $h : B \to C$ er avbildninger. Anta at $g \circ f = h \circ f$. Vis at $g = h$.

> Anta $y \in B$. Ved surjektivitet av f, velg $x \in A$ slik at $f(x) = y$. Da har vi $g(f(x)) = h(f(x))$. Altså $g(y) = h(y)$. Siden dette gjelder for alle $y \in B$ får vi $g = h$.

(iv) Anta at for alle mengder C og for alle avbildninger $g : B \to C$ og $h : B \to C$ har vi:

$$g \circ f = h \circ f \implies g = h. \tag{18}$$

Vis at f er surjektiv, ved motsigelse.

> Anta for motsigelse at f ikke er surjektiv. Velg $y \in B$ slik at $\forall x \in A \quad f(x) \neq y$. La $C = \{0, 1\}$. La $g : B \to C$ være den konstante avbildningen med verdi 0. La $h : B \to C$ være den karakteristiske avbildningen til $\{y\}$. Da er $g \circ f : A \to C$ konstant med verdi 0, og det er $h \circ f$ også. Spesielt får vi $g \circ f = h \circ f$. Dermed $g = h$. Dermed $0 = g(y) = h(y) = 1$, som er umulig.