21. oktober 2020

MAT1140 — Strukt. Arg.

Obligatorisk oppgave 2 av 2

Innleveringsfrist

Torsdag 05. november 2020, klokken 14:30 i Canvas (canvas.uio.no).

Instruksjoner

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og oblignummer.

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Husk å inkludere alle relevante plott og figurer. Studenter som ikke får sin opprinnelige besvarelse godkjent, men som har gjort et reelt forsøk på å løse oppgavene, vil få én mulighet til å levere en revidert besvarelse. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

I oppgaver der du blir bedt om å programmere må du legge ved programkoden og levere den sammen med resten av besvarelsen. Det er viktig at programkoden du leverer inneholder et kjøreeksempel, slik at det er lett å se hvilket resultat programmet gir.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) i god tid før innleveringsfristen.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

LYKKE TIL!

Oppgave 1 (20 poeng)**.** La U være en mengde. Vi innfører en relasjon $\sim$ på $\mathcal{P}(U)$ ved å at kreve at for alle $A, B \subseteq U$ har vi $A \sim B$ hvis og bare hvis det finnes en bijeksjon fra A til B.

Vis at $\sim$ er en ekvivalensrelasjon.

– refleksivitet. Vi har for alle $A \subseteq U$, at id_A er en bijeksjon $A \to A$, dermed $A \sim A$.
– transitivitet. La $A, B, C \subseteq U$. Anta at $A \sim B$ og $B \sim C$. Velg en bijeksjon $f : A \to B$ og en bijeksjon $g : B \to C$. Da er $g \circ f : A \to C$ en bijeksjon, dermed $A \sim C$.
– symmetri. La $A, B \subseteq U$ og anta $A \sim B$. Velg en bijeksjon $f : A \to B$. Da har vi bijeksjonen $f^{-1} : B \to A$. Dermed $B \sim A$.

Oppgave 2 (20 poeng)**.** La U, V være mengder og la $f : U \to V$ være en avbildning.

(i) [10 poeng] Anta at for alle $A, B \in \mathcal{P}(U)$ har vi $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$. Vis at f er injektiv.

La $x, y \in U$ og anta at $f(x) = f(y)$. Anta for motsigelse at $x \neq y$. Da har vi $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$. Det gir:

$$\emptyset = f[\emptyset] = f[\{x\} \cap \{y\}] = f[\{x\}] \cap f[\{y\}] = \{f(x)\} \cap \{f(y)\}. \quad (1)$$

Det gir motsigelsen $f(x) \neq f(y)$.

(ii) [10 poeng] Anta at for alle $y \in V$ har vi $f[f^{-1}[\{y\}]] = \{y\}$. Vis at f er surjektiv.

Anta for motsigelse at f ikke er surjektiv. Velg $y \in V$ slik at $\forall x \in U \quad f(x) \neq y$. Det gir $f^{-1}[\{y\}] = \emptyset$. Dermed $f[f^{-1}[\{y\}]] = f[\emptyset] = \emptyset \neq \{y\}$ som gir en motsigelse.

Oppgave 3 (20 poeng)**.** La $k \in \mathbb{Z}$ være gitt. På $\mathbb{Z}$ definerer vi en operasjon $\star$ ved å kreve at, for alle $x, y \in \mathbb{Z}$:

$$x \star y = x + y - k. \quad (2)$$

Vis at operasjonen $\star$ er assosiativ, kommutativ og har et nøytralt element. Vis at alle elementer er invertible.

– assosiativitet. For $x, y, z \in \mathbb{Z}$ har vi:

$$
\begin{aligned}
(x \star y) \star z &= (x + y - k) + z - k, && (3)\\
&= x + (y + z - k) - k, && (4)\\
&= x \star (y \star z). && (5)
\end{aligned}
$$

– kommutativitet. For $x, y \in \mathbb{Z}$ har vi:

$$
\begin{aligned}
x \star y &= x + y - k, && (6)\\
&= y + x - k, && (7)\\
&= y \star x. && (8)
\end{aligned}
$$

– Vi sjekker at k er nøytralt element. For $x \in \mathbb{Z}$ har vi:

$$
\begin{aligned}
x \star k &= x + k - k = x, && (9)\\
k \star x &= k + x - k = x. && (10)
\end{aligned}
$$

– Vi har $x \star y = k \iff x + y - k = k \iff y = 2k - x$. Dermed er x invertibel med invers $2k - x$.

Oppgave 4 (30 poeng)**.** La A være en mengde. La $\mathcal{E}$ være mengden av ekvivalensrelasjoner på A. Når R er et element i $\mathcal{E}$, og x, y er elementer i A, skriver vi xRy for å si at x er relatert til y gjennom R[1]. Vi definerer en relasjon $\preceq$ på $\mathcal{E}$ ved å kreve at når R og R' er to elementer i $\mathcal{E}$, har vi:

$$
R \preceq R' \iff (\forall x, y \in A \quad xRy \implies xR'y). \tag{11}
$$

(i) [10 poeng] Vis at $\preceq$ er en ordensrelasjon på $\mathcal{E}$.

– refleksivitet. Gitt $R \in \mathcal{E}$ har vi, for alle $x, y \in A$ at $xRy \implies xRy$, dermed $R \preceq R$.
– transitivitet. Anta $R, R', R'' \in \mathcal{E}$ og at $R \preceq R'$ og $R' \preceq R''$. For alle $x, y \in A$ har vi at hvis xRy så $xR'y$ dermed $xR''y$. Dermed $R \preceq R''$.
– Antisymmetri. Anta $R, R' \in \mathcal{E}$ og at $R \preceq R'$ og $R' \prec R$. For alle $x, y \in A$ har vi da at $xRy \implies xR'y$ og $xR'y \implies xRy$, dermed $xRy \iff xR'y$. Det gir $R = R'$.

(ii) [10 poeng] Hva er minste og største element i $\mathcal{E}$?

[1] Andre mulige notasjoner kunne være $(x, y) \in R$, eller $R(x, y)$.

– Likhet er minste element i $\mathcal{E}$. For alle $R \in \mathcal{E}$ har vi, for alle $x, y \in A$

$$x = y \implies xRy, \tag{12}$$

siden R er refleksiv.
– Relasjonen $A \times A$ er størst i $\mathcal{E}$, siden for alle $R \in \mathcal{E}$ har vi, for alle $x, y \in A$,

$$xRy \implies (x, y) \in A \times A. \tag{13}$$

(iii) [10 poeng] Gitt $R, R' \in \mathcal{E}$, vis at $R \preceq R'$ hvis og bare hvis, for hver ekvivalensklasse u for R finnes det en ekvivalensklasse v for R' slik at $u \subseteq v$.

– Anta at $R \preceq R'$. La $u = [x]_R$ være en ekvivalensklasse for R. Definer $v = [x]_{R'}$. Hvis $y \in u$ har vi xRy dermed $xR'y$ dermed $y \in v$. Så $u \subseteq v$.
– Anta at for hver ekvivalensklasse u for R finnes det en ekvivalensklasse v for R' slik at $u \subseteq v$. La $x, y \in A$ og anta xRy. Da har vi $y \in [x]_R$. Velg $z \in A$ slik at $[x]_R \subseteq [z]_{R'}$. Da har vi $xR'z$ og $yR'z$. Dermed $xR'y$. Dermed $R \preceq R'$.