MAT1140 Oppgaver H2020

Uke 36

1.2.3 La m og n være heltall.
(a) Bevis at hvis m er et partall, så er mn et partall.
(b) Bevis at hvis m og n er oddetall, så er mn et oddetall.

2.1.1 La a, b og c være heltall. Bevis at for alle heltall m og n, hvis $a \mid b$ og $a \mid c$, så $a \mid (bm + cn)$.

2.1.4 Ved å bruke definisjoner, gi et bevis ved tilfeller for at for ethvert heltall n så er $n^2 + n + 5$ et oddetall.

2.2.2 Bevis at ingen heltall n er slik at n er både partall og oddetall.

2.2.3 Bevis at det er ingen heltall m og n slik at $8m + 26n = 1$.

2.3.1 Bevis at $\sqrt{3}$ er irrasjonal. (Hint: Du kan ta som gitt at for alle heltall n, hvis $3 \mid n^2$, så $3 \mid n$.)

4.1.3 La A og B være mengder. Bevis at hvis $x \notin B$ og $A \subseteq B$, så $x \notin A$.

4.1.7 La $A = \{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}$.
(a) Bevis at for alle $x,y \in \mathbb{Q}$, $x + y\sqrt{2} = 0$ hvis og bare hvis $x = y = 0$.
(b) Bevis at for alle $z_1, z_2 \in A$, $z_1 + z_2, z_1 z_2 \in A$ og at når $z_2 \neq 0$, $\dfrac{z_1}{z_2} \in A$.

4.2.6 La A, B, C og D være mengder slik at $C \subseteq A$ og $D \subseteq B$. Vis at $D - A \subseteq B - C$.

4.2.15 Hvilke av de følgende påstandene er sanne for enhver mengde A? Forklar.

$$\varnothing \subseteq \mathcal{P}(A), \qquad \varnothing \in \mathcal{P}(A),$$
$$A \subseteq \mathcal{P}(A), \qquad A \in \mathcal{P}(A).$$

Uke 37

4.2.2 La A og B være mengder hvor $\mathcal{U}$ er den underliggende universelle mengden. Bevis at $A \subseteq B \iff \overline{B} \subseteq \overline{A}$.

4.2.12 La A, B, C, og D være mengder. Bevis de følgende påstandene.
(a) $A \times \varnothing = \varnothing = \varnothing \times A$.
(b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
(c) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

5.1.2 La $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være definert ved at for alle $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x, y) = y$. (Merk at f er en *projeksjon*, den projiserer alle input $(x, y) \in \mathbb{R}$ til sin andrekoordinat y.) Bevis at $ran\ f = \mathbb{R}$.

5.1.5 La $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ være definert ved at for alle $n \in \mathbb{Z}$:

$$f(n) = \begin{cases} n - 1 & \text{hvis } n \text{ er partall} \\ n + 5 & \text{hvis } n \text{ er oddetall.} \end{cases}$$

Bevis at $ran\ f = \mathbb{Z}$.

5.2.2 La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være definert ved at for all $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{hvis } x \geq 0, \\ x - 2 & \text{hvis } x < 0, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{hvis } x \geq 4, \\ 2x & \text{hvis } x < 4. \end{cases}$$

Finn $f \circ g$.

Uke 38

5.3.2 La $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ være definert ved:

$$f(n) = \begin{cases} n-1 & \text{hvis } n \text{ er partall,} \\ n+3 & \text{hvis } n \text{ er oddetall.} \end{cases}$$

Bevis at f er en bijeksjon. (*Hint*: for å vise at f er en injeksjon, la $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ og anta $f(n_1) = f(n_2)$, som vanlig. Se så på tilfeller for n_1 og n_2. Hvor mange tilfeller er det?)

5.4.2 For hver av funksjonene f under,

1. Bestem om f er injektiv.
2. Bestem om f er surjektiv.
3. Bestem om f er invertibel ved hjelp av svarene over. Dersom f er invertibel, finn inversen f^{-1}.

Bevis svarene dine.

(a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, definert ved:

$$f(n) = \begin{cases} n-1 & \text{hvis } n \text{ er partall,} \\ n+3 & \text{hvis } n \text{ er oddetall.} \end{cases}$$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definert ved:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{hvis } x \geq 0, \\ 2x & \text{hvis } x < 0. \end{cases}$$

(c) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, definert ved:

$$f(n) = \begin{cases} n+1 & \text{hvis } n \text{ er partall,} \\ 2n & \text{hvis } n \text{ er oddetall.} \end{cases}$$

(d) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, definert ved:

$$f(n) = \begin{cases} 2n+1 & \text{hvis } n \text{ er partall,} \\ n+3 & \text{hvis } n \text{ er oddetall.} \end{cases}$$

5.5.6 La X og Y være mengder, $A \subseteq X$ og $f : X \to Y$.

(a) Bevis at $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$.

(b) Gi eksempler på mengder X og Y, en delmengde $A \subseteq X$ og en funksjon $f : X \to Y$ slik at $A \neq f^{-1}[f[A]]$.

5.5.8 La X og Y være mengder, $A, B \subseteq X$, og $f : X \to Y$ en injeksjon. Bevis at $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$.

Advarsel: Om du ikke bruker antagelsen at f er en injeksjon har du ikke et bevis.

Uke 39

Denne uken er også 3.2, 3.4 og 3.5 i Spill § 3.5 ukesoppgaver. Her følger oversettelser av de resterende ukesoppgavene fra Lakins' bok.

3.2.5 I denne oppgaven skal du bevise at Prinsippet om Matematisk Induksjon (PMI) er ekvivalent med Prinsippet om Sterk Matematisk Induksjon (PSMI). Med andre ord, bevis at gitt PMI kan man utlede PSMI, og omvendt.

(a) Anta at PSMI er sann. For å vise at PMI er sann, la $P(n)$ være en påstand om det positive heltallet n. *Anta at*

(i) $P(1)$ er sann og

(ii) for alle $m \in \mathbb{Z}^+$, hvis $P(m)$ er sann, så er $P(m+1)$ sann.

Målet ditt nå er å bevise at for alle $n \in \mathbb{Z}^+$ så er $P(n)$ sann. Du bør gjøre dette ved hjelp av PSMI. Dette betyr at du skal *bevise*

(iii) P(1) er sann og

(iv) for alle $m \in \mathbb{Z}^+$, hvis $P(k)$ er sann for alle heltall k med $1 \leq k \leq m$, så er $P(m+1)$ sann.

Du kan da konkludere fra PSMI at for alle $n \in \mathbb{Z}^+$ så er $P(n)$ sann.

(b) Anta at PMI er sann. For å vise at PSMI er sann, la $P(n)$ være en påstand om det positive heltallet n. *Anta at*

(i) $P(1)$ er sann og

(ii) for alle $m \in \mathbb{Z}^+$, hvis $P(k)$ er sann for alle heltall k med $1 \leq k \leq m$, så er $P(m+1)$ sann.

Målet ditt nå er å bevise at for alle $n \in \mathbb{Z}^+$ så er $P(n)$ sann. Du bør gjøre dette ved hjelp av PMI og en litt annen påstand enn $P(n)$. La $Q(n)$ være påstanden $(\forall k \leq n)P(k)$. Bruk PMI for å bevise at for alle $n \in \mathbb{Z}^+$ så er $Q(n)$ sann. Dette betyr at du skal *bevise*

(iii) $Q(1)$ er sann og

(iv) for alle $m \in \mathbb{Z}^+$, hvis $Q(m)$ er sann så er $Q(m+1)$ sann.

Du kan da konkludere fra PMI at for alle $n \in \mathbb{Z}^+$ så er $Q(n)$ sann. Til slutt forklar hvorfor $P(n)$ er da også sann for alle $n \in \mathbb{Z}^+$.

Uke 40

Denne uken er også 5.3 i Spill § 5.5 en ukesoppgave. Her følger oversettelser av de resterende ukesoppgavene fra Lakins' bok.

7.1.2 Anta at (den binære) relasjonen f er en funksjon $f : X \to Y$ og at (den binære) relasjonen g er en funksjon $g : Y \to Z$, som i definisjon 7.1.8.[1] Skriv ned definisjonen av komposisjonen $g \circ f$, mens du er klar på at $f \subseteq X \times Y$ og $g \subseteq Y \times Z$.

7.2.3 La $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Gi et eksempel på en (binær) relasjon R på A (hvor du gir R som en mengde av ordnede par) slik at:

(a) R er refleksiv, symmetrisk og transitiv.
(b) R er refleksiv, symmetrisk og ikke transitiv.
(c) R er refleksiv, ikke symmetrisk og transitiv.
(d) R er refleksiv, ikke symmetrisk og ikke transitiv.
(e) R er ikke refleksiv, symmetrisk og transitiv.
(f) R er ikke refleksiv, symmetrisk og ikke transitiv.
(g) R er ikke refleksiv, ikke symmetrisk og transitiv.
(h) R er ikke refleksiv, ikke symmetrisk og ikke transitiv.

[1] Denne definisjonen sier at en binær relasjon $R \subseteq A \times B$ er en funksjon dersom

$$\forall a \in dom\ R : \exists! b \in B : aRb.$$

Uke 41

Midtveisuke, ingen ukesoppgaver.

Uke 42

Ukesoppgaver i Spill: 6.5: 6.1, 6.3, 6.8.

Uke 43

Ukesoppgaver i Spill: 6.5: 6.9, 6.10, 6.11.

Uke 44

8.1.3 Bevis at $\mathbb{N} \approx O^*$, hvor O^* er mengden av de positive odde heltallene.

8.1.6 La $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ slik at $a < b$ og $c < d$. Bevis at $(a, b) \approx (c, d)$. Hvilke andre par av begrensede intervaller med disse endepunktene er ekvinumerøse?

8.1.7 Bevis at $[0, 1] \approx (0, 1)$. (Hint: Tegningen under gir en idé av beviset.)

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \cdots
\end{array}$$

8.2.6 La A være en endelig mengde og B en uendelig mengde. Vis at $B - A$ er uendelig.

8.2.12 La $A \neq \varnothing$ være en endelig mengde, $B \neq \varnothing$ en mengde, og $f : A \to B$. Vis at bildet $f[A]$ også er endelig og at $|f[A]| \leq |A|$. Videre, vis at f er 1-1 (injektiv) hvis og bare hvis $|f[A]| = |A|$.

8.2.13 La A og B være ikke-tomme endelige mengder slik at $|A| = |B|$, og la $f : A \to B$. Vis at f er injektiv hvis og bare hvis f er surjektiv.

Uke 45

8.3.1 La A være en tellbart uendelig mengde og la x være et element i det underliggende universet. Vis at $A \cup \{x\}$ også er tellbart uendelig.

8.3.5 Vis at unionen av en endelig mengde og en tellbart uendelig mengde er tellbart uendelig.

8.3.9 Vis at $\mathbb{N} \approx \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ på de følgende måtene:

(a) Billedlig/visuelt og formelt, ved hjelp av Cantors første diagonaliseringsmetode. (Se oppgave 5.3.10 i Lakins)

(b) Formelt, ved å vise at funksjonen $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definert ved

$$f(m, n) = 2^{m-1}(2n - 1)$$

for alle $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ er en bijeksjon. (Hint: du kommer til å trenge Aritmetikkens Fundamentalteorem, se f. eks. Lakins teorem 3.2.3.)

8.3.19 (Eventuelt denne oppgaven også). Et reelt tall α er *algebraisk* hvis det finnes et polynom p av grad minst 1 med heltallskoeffisienter slik at $p(\alpha) = 0$, altså at α er en rot av dette polynomet. Et reelt tall er *transcendentalt* dersom det ikke er algebraisk.

(a) Bevis at alle rasjonale tall er algebraiske.

(b) Bevis at $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ og $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ er alle algebraiske.

(c) Bevis at hvis $\alpha \in \mathbb{R}$ er algebraisk og $\alpha \neq 0$, så er $\alpha^{-1} = \dfrac{1}{\alpha}$ også algebraisk.

(d) La A være mengden av algebraiske tall. Vis at A er tellbart uendelig. (Hint: Du kommer til å trenge resultatet i oppgave 6.1.6 (b).[2])

(e) Bevis at mengden av de transcendentale tallene er utellelig. (Merk deg at du ikke trenger å gi et eksempel på et transcendentalt tall. Det viser seg at π og e er transcendentale, men dette er ganske vanskelig å bevise.)

[2]Dette resultatet sier at et polynom med reelle koeffisienter av grad $n \in \mathbb{N}$ har maksimalt n reelle røtter.

Uke 46

6.1.2 Vis at kuben (n^3) av ethvert heltall n har en av formene $9k$, $9k+1$ eller $9k+8$, hvor $k \in \mathbb{Z}$.

6.2.2 Bevis proposisjon 6.2.7 i Lakins: La $a, b \in \mathbb{Z}$ slik at minst én av a og b er forskjellig fra 0. Da er $(a, b) = (|a|, |b|)$.

6.2.3 La $a, b \in \mathbb{Z}$ slik at minst én av a og b er forskjellig fra 0, og la $d = (a, b)$. La

$$S = \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists x, y \in \mathbb{Z}(n = ax + by)\},$$

altså S er mengden av alle lineære kombinasjoner av a og b. La

$$T = \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists m \in \mathbb{Z}(n = dm)\},$$

altså T er mengden av alle heltallsmultipler av d. Bevis at $S = T$.

6.3.1 Bevis Korollar 6.3.4: for alle $a, b \in \mathbb{Z}$, for alle $p \in \mathbb{Z}^+$, hvis p er et primtall og $p \mid ab$, så $p \mid a$ eller $p \mid b$. Bevis også at dette resultatet ikke holder generelt, altså at det finnes moteksempler når p ikke er et primtall.

6.3.10 ("Rasjonalrotteoremet") La $r, s \in \mathbb{Z}$ hvor $s \neq 0$ og $(r, s) = 1$. La p være et polynom med heltallskoeffisienter, altså $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, hvor $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. Vis at hvis $\frac{r}{s}$ er en rasjonal rot av p, altså hvis $p\left(\frac{r}{s}\right) = 0$, så $r \mid a_0$ og $s \mid a_n$.

6.4.11 La $n \in \mathbb{Z}^+$ være slik at $n \geq 2$, og anta at $(n-1)! \equiv -1 \mod n$. Bevis at n er et primtall.