UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1140 — Strukturer og argumenter
Eksamensdag:	Onsdag 2. desember 2020
Tid for eksamen:	15:00 – 19:00
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Alle

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

For hvert spørsmål kan du bruke resultater fra tidligere spørsmål, selv om du ikke har besvart dem.
Det vil bli lagt spesiell vekt på argumentasjonen i besvarelsene.

Terminologi og notasjon:

- Vi anser at 0 er et naturlig tall, slik at $0 \in \mathbb{N}$.

Oppgave 1 (vekt 10 poeng)

La P og Q være utsagn. Vi antar at følgende utsagn er sant:

$$(P \implies (Q \implies P)). \tag{1.1}$$

Følger det da at utsagnet $P \iff Q$ må være sant?

Oppgave 2 (vekt 10 poeng)

La A og B være mengder. Vi antar at:

$$A \cap B = A \cup B. \tag{2.1}$$

Vis at $A = B$.

Oppgave 3 (vekt 10 poeng)

La A og B være mengder og la $f : A \to B$ være en avbildning. Vi antar at vi har en ekvivalensrelasjon $\sim$ på B. Vi definerer en relasjon $\approx$ på A ved å kreve at, for alle x og y, elementer i A, har vi at:

$$x \approx y \iff f(x) \sim f(y). \tag{3.1}$$

Vis at $\approx$ er en ekvivalensrelasjon.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 4 (vekt 20 poeng)

På $\mathbb{Z}\times\{-1,1\}$ definerer vi en operasjon $\star$ ved å kreve at, for alle $(x,s),(y,t)\in\mathbb{Z}\times\{-1,1\}$ har vi:

$$(x,s)\star(y,t)=(x+sy,st). \tag{4.1}$$

a (vekt 10 poeng)

Sjekk at denne operasjonen er assosiativ men ikke kommutativ.

b (vekt 10 poeng)

Sjekk at denne operasjonen har et nøytralt element, og at alle elementer i $\mathbb{Z}\times\{-1,1\}$ er invertible.

Oppgave 5 (vekt 10 poeng)

Finn en løsning $(k,l)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ til likningen:

$$9000k+1575l=225. \tag{5.1}$$

Oppgave 6 (vekt 20 poeng)

La A, B og C være mengder. La $f:A\to B$ og $g:B\to C$ være avbildninger. Vi definerer $h=g\circ f$.

a (vekt 10 poeng)

Anta at h er surjektiv og at g er injektiv. Vis at f er surjektiv.

b (vekt 10 poeng)

Anta at h er injektiv og at f er surjektiv. Vis at g er injektiv.

Oppgave 7 (vekt 20 poeng)

Vi antar at vi har definert mengder E_k for hver $k\in\mathbb{N}$, slik at:

$$\bullet\ E_0=\emptyset, \tag{7.1}$$

$$\bullet\ \forall k\in\mathbb{N}\quad E_{k+1}=E_k\cup\{E_k\}. \tag{7.2}$$

a (vekt 10 poeng)

Vis ved induksjon, at for alle $k\in\mathbb{N}$, for alle $x\in E_k$ har vi at $x\subseteq E_k$.

b (vekt 10 poeng)

Vis ved induksjon at for alle $k\in\mathbb{N}$ har vi $E_k\neq E_{k+1}$. Hva er kardinaliteten til E_k?

SLUTT