UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1140 — Strukturer og argumenter
Eksamensdag:	Onsdag 2. desember 2020
Tid for eksamen:	15:00 – 19:00
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Alle

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

For hvert spørsmål kan du bruke resultater fra tidligere spørsmål, selv om du ikke har besvart dem.
Det vil bli lagt spesiell vekt på argumentasjonen i besvarelsene.

Terminologi og notasjon:

- Vi anser at 0 er et naturlig tall, slik at $0 \in \mathbb{N}$.

Oppgave 1 (vekt 10 poeng)

La P og Q være utsagn. Vi antar at følgende utsagn er sant:

$$(P \implies (Q \implies P)). \tag{1.1}$$

Følger det da at utsagnet $P \iff Q$ må være sant?

Hvis P er usant og Q er sant, er $(P \implies (Q \implies P))$ sant, men $P \iff Q$ er usant. Dermed medfører ikke $(P \implies (Q \implies P))$ at $P \iff Q$.
Alternativ : bruk av sannhetstabell.

Oppgave 2 (vekt 10 poeng)

La A og B være mengder. Vi antar at:

$$A \cap B = A \cup B. \tag{2.1}$$

Vis at $A = B$.

Anta $x \in A$. Da har vi $x \in A \cup B$. Dermed $x \in A \cap B$. Dermed $x \in B$. Dette viser at $A \subseteq B$. At $B \subseteq A$ vises på samme måte. Dermed $A = B$.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3 (vekt 10 poeng)

La A og B være mengder og la $f : A \to B$ være en avbildning. Vi antar at vi har en ekvivalensrelasjon $\sim$ på B. Vi definerer en relasjon $\approx$ på A ved å kreve at, for alle x og y, elementer i A, har vi at:

$$x \approx y \iff f(x) \sim f(y). \tag{3.1}$$

Vis at $\approx$ er en ekvivalensrelasjon.

– Refleksivitet: For alle $x \in A$ har vi $f(x) \sim f(x)$ (refleksivitet av $\sim$), dermed $x \approx x$.
– Transitivitet: For alle $x, y, z \in A$, hvis $x \approx y$ og $y \approx z$ så $f(x) \sim f(y)$ og $f(y) \sim f(z)$, dermed $f(x) \sim f(z)$ (transitivitet av $\sim$), dermed $x \approx z$.
– Symmetri: For alle $x, y \in A$, hvis $x \approx y$ så $f(x) \sim f(y)$, dermed $f(y) \sim f(x)$ (symmetri av $\sim$), dermed $y \approx x$.

Oppgave 4 (vekt 20 poeng)

På $\mathbb{Z} \times \{-1, 1\}$ definerer vi en operasjon $\star$ ved å kreve at, for alle $(x, s), (y, t) \in \mathbb{Z} \times \{-1, 1\}$ har vi:

$$(x, s) \star (y, t) = (x + sy, st). \tag{4.1}$$

a (vekt 10 poeng)

Sjekk at denne operasjonen er assosiativ men ikke kommutativ.

For alle $(x, s), (y, t), (z, u)$ har vi:

$$\begin{aligned} ((x, s) \star (y, t)) \star (z, u) &= (x + sy, st) \star (z, u), && (4.2)\\ &= (x + sy + stz, stu). && (4.3)\\ (x, s) \star ((y, t) \star (z, u)) &= (x, s) \star (y + tz, tu), && (4.4)\\ &= (x + sy + stz, stu). && (4.5) \end{aligned}$$

Dermed er operasjonen assosiativ.
Vi har at:

$$\begin{aligned} (1, 1) \star (1, -1) &= (2, -1), && (4.6)\\ (1, -1) \star (1, 1) &= (0, -1). && (4.7) \end{aligned}$$

Dermed er operasjonen ikke kommutativ.

b (vekt 10 poeng)

Sjekk at denne operasjonen har et nøytralt element, og at alle elementer i $\mathbb{Z} \times \{-1, 1\}$ er invertible.

(Fortsettes på side 3.)

Vi har at:

$$(x,s) \star (0,1) = (x,s), \tag{4.8}$$
$$(0,1) \star (x,s) = (x,s). \tag{4.9}$$

Dermed er $(0,1)$ nøytralt element.
At (y,t) er invers av (x,s) betyr at:

$$(x + sy, st) = (y + tx, ts) = (0,1). \tag{4.10}$$

Det oppfylles når $t = s^{-1}$, $y = -s^{-1}x$.

Oppgave 5 (vekt 10 poeng)

Finn en løsning $(k,l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ til likningen:

$$9000k + 1575l = 225. \tag{5.1}$$

Euklids algoritme gir:

$$9000 = 5 \times 1575 + 1125, \tag{5.2}$$
$$1575 = 1125 + 450, \tag{5.3}$$
$$1125 = 2 \times 450 + 225, \tag{5.4}$$
$$450 = 2 \times 225. \tag{5.5}$$

Dermed:

$$225 = 1125 - 2 \times 450, \tag{5.6}$$
$$= 1125 - 2 \times (1575 - 1125) = -2 \times 1575 + 3 \times 1125, \tag{5.7}$$
$$= -2 \times 1575 + 3 \times (9000 - 5 \times 1575) = -17 \times 1575 + 3 \times 9000. \tag{5.8}$$

Oppgave 6 (vekt 20 poeng)

La A, B og C være mengder. La $f : A \to B$ og $g : B \to C$ være avbildninger. Vi definerer $h = g \circ f$.

a (vekt 10 poeng)

Anta at h er surjektiv og at g er injektiv. Vis at f er surjektiv.

La $y \in B$. Velg $x \in A$ slik at $h(x) = g(y)$. Vi har $g(f(x)) = g(y)$, dermed $f(x) = y$.
Alternativ: Siden h er surjektiv må g være surjektiv. Dermed er g bijektiv. Vi har at $f = g^{-1} \circ h$ som da er surjektiv som komposisjon av surjektive avbildninger.

(Fortsettes på side 4.)

b (vekt 10 poeng)

Anta at h er injektiv og at f er surjektiv. Vis at g er injektiv.

> La $y, y' \in B$ og anta at $g(y) = g(y')$. Velg $x, x' \in A$ slik at $f(x) = y$ og $f(x') = y'$. Da har vi $h(x) = h(x')$. Dermed $x = x'$. Dermed $y = f(x) = f(x') = y'$.
> Alternativ: Siden h er injektiv må f være injektiv. Dermed er f bijektiv. Vi har at $g = h \circ f^{-1}$. Dermed er g injektiv, som komposisjon av injektive avbildninger.

Oppgave 7 (vekt 20 poeng)

Vi antar at vi har definert mengder E_k for hver $k \in \mathbb{N}$, slik at:

$$\bullet\ E_0 = \emptyset, \tag{7.1}$$

$$\bullet\ \forall k \in \mathbb{N} \quad E_{k+1} = E_k \cup \{E_k\}. \tag{7.2}$$

a (vekt 10 poeng)

Vis ved induksjon, at for alle $k \in \mathbb{N}$, for alle $x \in E_k$ har vi at $x \subseteq E_k$.

> Vi lar $P(k)$ være utsagnet "for alle $x \in E_k$ har vi at $x \subseteq E_k$".
> – $P(0)$ er sant siden ingen x tilfredsstiller $x \in \emptyset$.
> – La $k \in \mathbb{N}$ og anta at $P(k)$. Anta at $x \in E_{k+1} = E_k \cup \{E_k\}$. Da har vi $x \in E_k$ eller $x = E_k$. Det gir $x \subseteq E_k$ dermed $x \subseteq E_{k+1}$.

b (vekt 10 poeng)

Vis ved induksjon at for alle $k \in \mathbb{N}$ har vi $E_k \neq E_{k+1}$. Hva er kardinaliteten til E_k?

> Vi lar $Q(k)$ være utsagnet $E_k \neq E_{k+1}$.
> – $Q(0)$ er sant siden $\emptyset \neq \{\emptyset\}$.
> – La $k \in \mathbb{N}$ og anta at $Q(k)$. Anta for motsigelse at ikke $Q(k+1)$. Det vil si $E_{k+1} = E_{k+2}$. Det vil si $E_k \cup \{E_k\} = E_{k+1} \cup \{E_{k+1}\}$. Det gir $E_{k+1} \in E_k$ eller $E_{k+1} = E_k$. Siste tilfelle er utelukket av $Q(k)$. Første tilfellet gir $E_{k+1} \subseteq E_k$ (forrige deloppgave), dermed $E_{k+1} = E_k$, som var utelukket. Dette fullfører motsigelsesbeviset.
> Siden $E_k \neq E_{k+1}$ får vi $E_k \notin E_k$. Dermed er $\#E_{k+1} = \#E_k + 1$. Ved induksjon gir det $\#E_k = k$.

SLUTT