27. oktober 2021

MAT1140 — Strukt. Arg.

Obligatorisk oppgave 1 av 2

Innleveringsfrist

Torsdag 07. oktober 2021, klokken 14:30 i Canvas (canvas.uio.no).

Instruksjoner

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og oblignummer.

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Husk å inkludere alle relevante plott og figurer. Studenter som ikke får sin opprinnelige besvarelse godkjent, men som har gjort et reelt forsøk på å løse oppgavene, vil få én mulighet til å levere en revidert besvarelse. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

I oppgaver der du blir bedt om å programmere må du legge ved programkoden og levere den sammen med resten av besvarelsen. Det er viktig at programkoden du leverer inneholder et kjøreeksempel, slik at det er lett å se hvilket resultat programmet gir.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) i god tid før innleveringsfristen.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

LYKKE TIL!

Hvert av de 10 spørmålene teller 10 poeng. For å få obligen godkjent kreves det 50 poeng.

Oppgave 1. La A og B være mengder.

(i) Vis at:

$$A \cap B = A \iff A \subseteq B. \tag{1}$$

Anta at $A \cap B = A$. Da har vi $A \subseteq A \cap B$ og $A \cap B \subseteq B$. Dermed $A \subseteq B$.
Anta $A \subseteq B$. Da har vi $A \subseteq A \cap B$. Siden også $A \cap B \subseteq A$ får vi $A \cap B = A$.

(ii) Vis at:

$$A \cup B = A \iff B \subseteq A. \tag{2}$$

Anta $A \cup B = A$. Vi har da $B \subseteq A \cup B$ og $A \cup B \subseteq A$. Dermed $B \subseteq A$.
Anta $B \subseteq A$. Da får vi $A \cup B \subseteq A$. Siden også $A \subseteq A \cup B$ får vi $A = A \cup B$.

Oppgave 2. La U være en mengde og la A og B være delmengder av U. Vi definerer en avbildning Φ ved:

$$\Phi \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(U) & \to & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ V & \mapsto & (V \cap A, V \cap B) \end{array} \right. \tag{3}$$

(i) Vis at hvis Φ er surjektiv så er $A \cap B = \emptyset$.

Kontrapositivt. Anta at $x \in A \cap B$.
Anta for motsigelse at $\Phi(V) = (\emptyset, \{x\})$. Da har vi $x \in V$. Dermed $V \cap A \neq \emptyset$.
Dermed er Φ ikke surjektiv.

(ii) Vis at hvis $A \cap B = \emptyset$ så er Φ surjektiv.

Vi antar $A \cap B = \emptyset$.
La $(A', B') \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$.
Definer $V = A' \cup B'$.
Da har vi $V \cap A = A'$ og $V \cap B = B'$. Altså $\Phi(V) = (A', B')$.

(iii) Vis at hvis Φ er injektiv så er $A \cup B = U$.

> Anta $x \in U \setminus (A \cup B)$.
> Da har vi $\Phi(\{x\}) = (\emptyset, \emptyset) = \Phi(\emptyset)$.
> Dermed er Φ ikke injektiv.

(iv) Vis at hvis $A \cup B = U$ så er Φ injektiv.

> Anta $A \cup B = U$.
> Anta $\Phi(V) = \Phi(V')$. Det vil si: $(A \cap V, B \cap V) = (A \cap V', B \cap V')$. I såfall $(A \cap V) \cup (B \cap V) = (A \cap V') \cup (B \cap V')$. Ved distributivitet er det: $(A \cup B) \cap V = (A \cup B) \cap V'$. Dermed $V = V'$.

Oppgave 3. La A, B og C være ikke–tomme mengder. Anta at $f : A \to B$ og $g : A \to C$ er avbildninger.

(i) Anta at det finnes $u : B \to C$ slik at $g = u \circ f$. Vis at, for alle $x, x' \in A$:

$$f(x) = f(x') \implies g(x) = g(x'). \tag{4}$$

> Hvis $f(x) = f(x')$ får vi $u(f(x)) = u(f(x'))$, altså $g(x) = g(x')$.

(ii) Anta at (4) er tilfredsstilt. Vis at det finnes $u : B \to C$ slik at $g = u \circ f$.

> La $y \in \operatorname{im} f$. Velg $x \in A$ slik at $f(x) = y$. Merk at $g(x)$ er uavhengig av valg av x. Sett $u(y) = g(x)$. Utvid u til B på en vilkårlig måte. Da har vi $g = u \circ f$.

Oppgave 4. La A, B og C være ikke–tomme mengder. Anta at $f : A \to B$ og $g : C \to B$ er avbildninger.

(i) Anta at det finnes en avbildning[1] $v : A \to C$ slik at $f = g \circ v$. Vis at $\operatorname{im} f \subseteq \operatorname{im} g$.

> Anta $f = g \circ v$. Hvis $y \in \operatorname{im} f$ kan vi velge $x \in A$ slik at $f(x) = y$. Da har vi $y = g(v(x))$. Spesielt får vi $y \in \operatorname{im} g$.

(ii) Anta at $\operatorname{im} f \subseteq \operatorname{im} g$. Vis at det finnes en avbildning $v : A \to C$ slik at $f = g \circ v$.

[1] Vi minner of at $\operatorname{im} f$ er det samme som verdimengden til f.

Anta $\operatorname{im} f \subseteq \operatorname{im} g$. La $x \in A$. Velg $y \in C$ slik at $f(x) = g(y)$. Definer da $v(x) = y$. Da har vi $f = g \circ v$.