15. november 2021

MAT1140 — Strukt. Arg.

Obligatorisk oppgave 1 av 2

Innleveringsfrist

Torsdag 28. oktober 2021, klokken 14:30 i Canvas (canvas.uio.no).

Instruksjoner

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og oblignummer.

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Husk å inkludere alle relevante plott og figurer. Studenter som ikke får sin opprinnelige besvarelse godkjent, men som har gjort et reelt forsøk på å løse oppgavene, vil få én mulighet til å levere en revidert besvarelse. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

I oppgaver der du blir bedt om å programmere må du legge ved programkoden og levere den sammen med resten av besvarelsen. Det er viktig at programkoden du leverer inneholder et kjøreeksempel, slik at det er lett å se hvilket resultat programmet gir.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) i god tid før innleveringsfristen.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

LYKKE TIL!

Oppgavesettet består av 2 oppgaver, med totalt 7 punkter (som igjen består av flere spørsmål). Hvert av de 7 punktene teller 10 poeng. For å få obligen godkjent kreves det 40 poeng.

Oppgave 1. Vi lar N være en ikke–tom mengde, utstyrt med en ordensrelasjon som vi skriver $\leq$. Vi antar følgende:

- N er velordnet, i den forstand at hver ikke-tomme delmengde av N har et minste element.
- Hver ikke-tomme delmengde av N som har en øvre skranke, har et største element.
- N har ikke noe største element.

Målet med denne oppgaven er å vise at man kan utlede Peanos aksiomer fra disse antagelsene.

(i) Vis at N er totalt ordnet.

La $x \in N$. Vi danner $A(x) = \{y \in N \ : \ x < y\}$. Sjekk at $A(x)$ ikke er tom.

– La $x, y \in N$. Siden $\{x, y\}$ har et minste element er x og y sammenliknbare. Dermed er N totalt ordnet.
– Vi har at x ikke er største element i N. Dermed finnes det $y \in N$ slik at $\neg(y \leq x)$. Siden N er totalt ordnet har vi da $x < y$. Dermed er $A(x)$ ikke tom.

(ii) For hver $x \in N$ lar vi $S(x) = \min A(x)$. Begrunn at for alle $x \in N$ har vi $x < S(x)$.

Vis at $S : N \to N$ er injektiv.

– Vi har $S(x) \in A(x)$ dermed $x < S(x)$.
– La $x, y \in N$ og anta at $S(x) = S(y)$. Anta for motsigelse at $x < y$. Da har vi $y \in A(x)$, dermed $S(x) \leq y$. Vi har også $y < S(y)$. Vi får da både $S(x) = y = S(y)$ og $y \neq S(y)$, som er en motsigelse. Dermed $x \geq y$. På samme måte viser man $y \geq x$.

(iii) La m være det minste elementet i N. Begrunn at m ikke ligger i verdimengden til avbildningen $S : N \to N$.

La P være en egenskap definert på N; for hver $x \in N$ har vi da et utsagn $P(x)$.

Vi antar at $P(m)$ er sant og at for hver $x \in N$ har vi $P(x) \implies P(S(x))$. Vis at for alle $x \in N$ har vi $P(x)$. Man kan argumentere rundt mengden av $x \in N$ slik at ikke $P(x)$.

– Hvis $S(x) = m$ får vi $x < m$. Det motstrider at m er minste element i N.
– Anta for motsigelse at det finnes en $x \in N$ slik at ikke $P(x)$. Betrakt mengden B av $x \in N$ slik at ikke $P(x)$. Da er B ikke tom. La n være minste element i B. Definer:

$$C = \{x \in N : x < n\}. \tag{1}$$

Vi har $m \leq n$ (siden m er minste element i N) og $m \neq n$ (siden $P(m)$). Derfor $m < n$, derfor $m \in C$.
La y være største element i C. Vi har $y < n$ så $P(y)$ må være sant. Vi får også $S(y) \leq n$, siden $n \in A(y)$. Men vi får også at $P(S(y))$ må være sant, fra $P(y)$. Det gir $S(y) \neq n$. Dermed $S(y) < n$. Altså $S(y) \in C$. Siden $y < S(y)$ motstrider dette at y er største element i C.

Oppgave 2. La A være en mengde, utstyrt med en relasjon R.

For hver $n \in \mathbb{N}^\star$, hver $(x, y) \in A \times A$, definerer vi at en n-vei fra x til y i A er en tuple $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in A^{n+1}$, slik at, $x_0 = x$ og $x_n = y$, og for hver $i \in \mathbb{N}$ med $i < n$, har vi $R(x_i, x_{i+1})$. Vi sier at en slik vei har lengde n.

(i) La $\overline{R}$ være relasjonen definert ved: $\overline{R}(x, y)$ hvis og bare hvis det finnes en $n \in \mathbb{N}^\star$ slik at det finnes en n-vei i A fra x til y.

Vis at $R \subseteq \overline{R}$.

Vis at hvis R er refleksiv så er $\overline{R}$ refleksiv.

Vis at hvis R er symmetrisk så er $\overline{R}$ symmetrisk.

– Anta at x, y er slik at $R(x, y)$. Da er (x, y) en 1-vei fra x til y, dermed $\overline{R}(x, y)$. Dette viser at $R \subseteq \overline{R}$.
– Anta at R er refleksiv. Da er (x, x) en 1-vei fra x til x. Dermed $\overline{R}(x, x)$. Så $\overline{R}$ er refleksiv.
– Anta at R er symmetrisk. Anta at $\overline{R}(x, y)$. Velg en n-vei $(x_0, \cdots, x_n)$ fra x til y. Da er $(x_n, x_{n-1}, \cdots x_0)$ en n-vei fra y til x. Dermed $\overline{R}(y, x)$. Dette viser at $\overline{R}$ er symmetrisk.

(ii) Vis at $\overline{R}$ er transitiv.

Anta at x, y, z er slik at $\overline{R}(x, y)$ og $\overline{R}(y, z)$. Velg en n-vei fra x til y som vi kaller $(x_0, \cdots, x_n)$. Velg også en m-vei fra y til z, som vi kaller $(y_0, \cdots, y_m)$. Vi betrakter da $(x_0, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)$. Det er en $(n + m)$-vei fra x til z. Dermed $\overline{R}(x, z)$.

(iii) Vis ved induksjon på lengden av veier at hvis S er transitiv og $R \subseteq S$ så er $\overline{R} \subseteq S$.

Anta at S er transitiv og $R \subseteq S$.
– Når (x, y) er en 1-vei har vi $S(x, y)$, fordi $R \subseteq S$.
– La $n \in \mathbb{N}^\star$ og anta at for hver n-vei $(x_0, \cdots, x_n)$, har vi $S(x_0, x_n)$.
Anta at $(x_0, \cdots, x_{n+1})$ er en $(n + 1)$-vei. Da har vi at $(x_0, \cdots, x_n)$ er en n-vei. Ved induksjonshypotesen gir det $S(x_0, x_n)$. Vi har også $R(x_n, x_{n+1})$ som gir $S(x_n, x_{n+1})$. Ved transitivitet av S får vi $S(x_0, x_{n+1})$.
Dette fullfører induksjonsbeviset.

(iv) La Q være en vilkårlig relasjon på A. La R være definert ved:

$$R(x, y) \iff (x = y \lor Q(x, y) \lor Q(y, x)). \tag{2}$$

Vi betrakter så relasjonen $\overline{R}$ oppnådd ved å utføre forrige kontruksjon på R. Vis at $\overline{R}$ er den minste (i forhold til inklusjonsordenen) ekvivalensrelasjonen som inneholder Q.

Siden R er er refleksiv og symmetrisk er $\overline{R}$ det også. Vi har også at $\overline{R}$ er transitiv. Dette viser at $\overline{R}$ er en ekvivalensrelasjon.
La nå S være en ekvivalensrelasjon slik at $Q \subseteq S$.
Vi sjekker først at $R \subseteq S$. Anta $R(x, y)$.
– Hvis $x = y$ får vi $S(x, y)$ siden S er refleksiv.
– Hvis $Q(x, y)$ får vi $S(x, y)$ siden $Q \subseteq S$.
– Hvis $Q(y, x)$ får vi $S(y, x)$ siden $Q \subseteq S$, som gir $S(x, y)$ ved symmetri av S.
Ved forrige spørsmål får vi da $\overline{R} \subseteq S$.
Dette viser at $\overline{R}$ er minst.