UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1140 — Strukturer og argumenter
Eksamensdag:	Fredag 10. desember 2021
Tid for eksamen:	09:00 – 13:00
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Alle

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

For hvert spørsmål kan du bruke resultater fra tidligere spørsmål, selv om du ikke har besvart dem.
Det vil bli lagt spesiell vekt på argumentasjonen i besvarelsene.

Terminologi og notasjon:

- Vi anser at 0 er et naturlig tall, slik at $0 \in \mathbb{N}$.
- Når A og B er mengder har vi:

$$(A \subset B) \iff (A \subseteq B \wedge A \neq B). \tag{0.1}$$

- Når A og B er mengder og $E \subseteq A$, er direktebildet til E gjennom f mengden definert ved:

$$f[E] = \{y \in B \ : \ \exists x \in E \quad y = f(x)\}. \tag{0.2}$$

Oppgave 1 (vekt 10 poeng)

La P, Q og R være utsagn. Vi antar at følgende utsagn er sant:

$$((P \implies Q) \vee (Q \implies P)) \implies R. \tag{1.1}$$

Følger det da at R er sant?

Oppgave 2 (vekt 10 poeng)

La A, B og C være mengder. Vis at man *ikke* kan ha:

$$(A \subset B) \wedge (B \subset C) \wedge (C \subset A). \tag{2.1}$$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3 (vekt 10 poeng)

La $n \in \mathbb{Z}$ være et oddetall. Vis at n og $n+2$ er innbyrdes primiske.

Oppgave 4 (vekt 20 poeng)

På $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ definerer vi en operasjon $\star$ ved å kreve at, for alle $(x,s),(y,t) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ har vi:

$$(x,s) \star (y,t) = (xy, sy + tx). \tag{4.1}$$

a (vekt 10 poeng)

Sjekk at denne operasjonen er assosiativ, kommutativ og har et nøytralt element, slik at vi har å gjøre med en kommutativ monoïde.

b (vekt 10 poeng)

La $(x,s) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. Vis at (x,s) er invertibel hvis og bare hvis $x \in \{1,-1\}$.

Oppgave 5 (vekt 10 poeng)

La A være en ikke tom mengde. La E være mengden av følger i A. Vi definerer en relasjon $\sim$ på E ved å kreve, for alle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ og $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$:

$$u \sim v \iff (\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq m \implies u_n = v_n). \tag{5.1}$$

Vis at $\sim$ er en ekvivalensrelasjon.

Oppgave 6 (vekt 10 poeng)

La A, B, C og D være mengder. La $f : A \to B$, $g : B \to C$ og $h : C \to D$ være avbildninger. Vi antar at $g \circ f$ og $h \circ g$ er bijeksjoner. Vis at f, g og h er bijeksjoner.

Oppgave 7 (vekt 30 poeng)

a (vekt 10 poeng)

La A, B og C være mengder. La $f : A \to B$ og $g : B \to C$ være avbildninger. La $E \subseteq A$. Vis at vi har følgende egenskap for direkte bilder:

$$g[f[E]] = (g \circ f)[E]. \tag{7.1}$$

b (vekt 10 poeng)

La A være en mengde og la $f : A \to A$ være en avbildning. Vi minner om at potensene til f er avbildningene f^n definert ved induksjon, for $n \in \mathbb{N}$ ved :

$$f^0 = \mathrm{id}_A, \tag{7.2}$$
$$f^{n+1} = f \circ f^n. \tag{7.3}$$

(Fortsettes på side 3.)

Vi definerer, for $n \in \mathbb{N}$, $A_n = f^n[A]$.

Vis at følgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er avtagende i den forstand at for alle $n \in \mathbb{N}$ har vi $A_{n+1} \subseteq A_n$.

c (vekt 10 poeng)

Vi bruker samme oppsett som forrige deloppgave, men antar nå i tillegg at A er endelig. Vis, for eksempel ved et kardinalitetsargument, at følgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er stasjonær, i den forstand at det finnes $m \in \mathbb{N}$ slik at for alle $n \geq m$ har vi $A_n = A_m$.

SLUTT