UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1140 — Strukturer og argumenter
Eksamensdag:	Fredag 10. desember 2021
Tid for eksamen:	09:00 – 13:00
Oppgavesettet er på 0 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Alle

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

For hvert spørsmål kan du bruke resultater fra tidligere spørsmål, selv om du ikke har besvart dem.
Det vil bli lagt spesiell vekt på argumentasjonen i besvarelsene.

Terminologi og notasjon:

- Vi anser at 0 er et naturlig tall, slik at $0 \in \mathbb{N}$.
- Når A og B er mengder har vi:
$$(A \subset B) \iff (A \subseteq B \wedge A \neq B). \tag{0.1}$$
- Når A og B er mengder og $E \subseteq A$, er direktebildet til E gjennom f mengden definert ved:
$$f[E] = \{y \in B \ : \ \exists x \in E \quad y = f(x)\}. \tag{0.2}$$

Oppgave 1 (vekt 10 poeng)

La P, Q og R være utsagn. Vi antar at følgende utsagn er sant:
$$((P \implies Q) \vee (Q \implies P)) \implies R. \tag{1.1}$$
Følger det da at R er sant?

Vi har:
$$\begin{aligned} ((P \implies Q) \vee (Q \implies P)) &\iff ((\neg P \vee Q) \vee (\neg Q \vee P)), &(1.2)\\ &\iff ((\neg P \vee P) \vee (Q \vee \neg Q)). &(1.3)\end{aligned}$$

Dette er dermed en tautologi. Vi har dermed:
$$\top \implies R. \tag{1.4}$$

Dette gir at R må være sant.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2 (vekt 10 poeng)

La A, B og C være mengder. Vis at man *ikke* kan ha:

$$(A \subset B) \wedge (B \subset C) \wedge (C \subset A). \tag{2.1}$$

Anta for motsigelse at utsagnet er sant. Da har vi spesielt:

$$(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \wedge (C \subseteq A). \tag{2.2}$$

Da får vi $A \subseteq C$ ved transitivitet. Siden også $C \subseteq A$ får vi $A = C$. Men $C \subset A$ gir $A \neq C$.
Vi har oppnådd en motsigelse.

Oppgave 3 (vekt 10 poeng)

La $n \in \mathbb{Z}$ være et oddetall. Vis at n og $n + 2$ er innbyrdes primiske.

Anta at $k|n$ og $k|(n + 2)$. Da får vi $k|2$, altså $k = \pm 1$ eller $k = \pm 2$. Men 2 deler ikke n. Dermed $k = \pm 1$.

Oppgave 4 (vekt 20 poeng)

På $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ definerer vi en operasjon $\star$ ved å kreve at, for alle $(x, s), (y, t) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ har vi:

$$(x, s) \star (y, t) = (xy, sy + tx). \tag{4.1}$$

a (vekt 10 poeng)

Sjekk at denne operasjonen er assosiativ, kommutativ og har et nøytralt element, slik at vi har å gjøre med en kommutativ monoïde.

(Fortsettes på side 3.)

– assosiativitet: Vi har:

$$((x,s)\star(y,t))\star(z,u) = (xy, sy+tx)\star(z,u), \tag{4.2}$$
$$= (xyz, (sy+tx)z+uxy), \tag{4.3}$$
$$= (xyz, syz+txz+uxy). \tag{4.4}$$

Vi har også:

$$(x,s)\star((y,t)\star(z,u)) = (x,s)\star(yz, tz+uy), \tag{4.5}$$
$$= (xyz, syz+(tz+uy)x), \tag{4.6}$$
$$= (xyz, syz+tzx+uyx). \tag{4.7}$$

Dette gir assosiativitet.
– Kommutativitet:

$$(y,t)\star(x,s) = (yx, tx+sy) = (xy, sy+tx) = (x,s)\star(y,t). \tag{4.8}$$

– Vi viser at $(1,0)$ er nøytralt element.

$$(1,0)\star(x,t) = (1x, 0t+t1) = (x,t). \tag{4.9}$$

b (vekt 10 poeng)

La $(x,s)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. Vis at (x,s) er invertibel hvis og bare hvis $x\in\{1,-1\}$.

Anta at (x,s) er invertibel, med (y,t) som invers.
Da får vi:

$$(xy, sy+tx) = (1,0). \tag{4.10}$$

Dermed er x invertibel i $\mathbb{Z}$, så $x\in\{1,-1\}$.
Anta nå at $x=1$. At (y,t) er invers er da ekvivalent med $y=1$ og $sy+tx=0$, som gir $s+t=0$. Altså må vi ha $(y,t)=(1,-s)$. Man sjekker at det faktisk er en invers.
Anta nå at $x=-1$. Da må vi ha, for en eventuell invers (y,t) at $y=-1$ og $-s-t=0$, som gir $(y,t)=(-1,-s)$. Man ser at det er en invers.

Oppgave 5 (vekt 10 poeng)

La A være en ikke tom mengde. La E være mengden av følger i A. Vi definerer en relasjon $\sim$ på E ved å kreve, for alle $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E$ og $v=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E$:

$$u\sim v \iff (\exists m\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N}\quad n\geq m \implies u_n=v_n). \tag{5.1}$$

Vis at $\sim$ er en ekvivalensrelasjon.

(Fortsettes på side 4.)

– Refleksiv. Vi har:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_n. \tag{5.2}$$

– Transitiv. Anta $u \sim v$ og $v \sim w$. Velg $m \in \mathbb{N}$ slik at:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq m \implies u_n = v_n. \tag{5.3}$$

Velg $p \in \mathbb{N}$ slik at:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq p \implies v_n = w_n. \tag{5.4}$$

Sett $q = \max\{m, p\}$. For $n \geq q$ har vi både $u_n = v_n$ og $v_n = w_m$, dermed $u_n = w_n$. Dette viser at $u \sim w$.
– Symmetrisk. Anta $u \sim v$. Velg $m \in \mathbb{N}$ slik at:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq m \implies u_n = v_n. \tag{5.5}$$

For $n \geq m$ har vi da $v_n = u_n$. Det gir $v \sim u$.

Oppgave 6 (vekt 10 poeng)

La A, B, C og D være mengder. La $f : A \to B$, $g : B \to C$ og $h : C \to D$ være avbildninger. Vi antar at $g \circ f$ og $h \circ g$ er bijeksjoner. Vis at f, g og h er bijeksjoner.

– Siden $g \circ f$ er en bijeksjon er g surjektiv. Siden $h \circ g$ er en bijeksjon er g injektiv. Dermed er g en bijeksjon.
– Vi har $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$, dermed er f bijektiv.
– Vi har $h = (h \circ g) \circ g^{-1}$, dermed er h bijektiv.

Oppgave 7 (vekt 30 poeng)

a (vekt 10 poeng)

La A, B og C være mengder. La $f : A \to B$ og $g : B \to C$ være avbildninger. La $E \subseteq A$. Vis at vi har følgende egenskap for direkte bilder:

$$g[f[E]] = (g \circ f)[E]. \tag{7.1}$$

– Anta $z \in g[f[E]]$. Velg $y \in f[E]$ slik at $z = g(y)$. Velg $x \in E$ slik at $f(x) = y$. Da har vi $g \circ f(x) = g(f(x)) = z$. Så $z \in (g \circ f)[E]$.
– Anta $z \in (g \circ f)[E]$. Velg $x \in E$ slik at $g \circ f(x) = z$. Da har vi $g(f(x)) = z$. Siden $f(x) \in f[E]$ får vi $g(f(x)) \in g[f[E]]$. Dermed $z \in g[f[E]]$.

(Fortsettes på side 5.)

b (vekt 10 poeng)

La A være en mengde og la $f : A \to A$ være en avbildning. Vi minner om at potensene til f er avbildningene f^n definert ved induksjon, for $n \in \mathbb{N}$ ved :

$$f^0 = \mathrm{id}_A, \tag{7.2}$$

$$f^{n+1} = f \circ f^n. \tag{7.3}$$

Vi definerer, for $n \in \mathbb{N}$, $A_n = f^n[A]$.

Vis at følgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er avtagende i den forstand at for alle $n \in \mathbb{N}$ har vi $A_{n+1} \subseteq A_n$.

Ved induksjon.
Vi har:

$$f[A] \subseteq A. \tag{7.4}$$

Anta $f^{n+1}[A] \subseteq f^n[A]$. Da får vi $f[f^{n+1}[A]] \subseteq f[f^n[A]]$. Ved hjelp av forrige deloppgave gir det $f^{n+2}[A] \subseteq f^{n+1}[A]$.

c (vekt 10 poeng)

Vi bruker samme oppsett som forrige deloppgave, men antar nå i tillegg at A er endelig. Vis, for eksempel ved et kardinalitetsargument, at følgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er stasjonær, i den forstand at det finnes $m \in \mathbb{N}$ slik at for alle $n \geq m$ har vi $A_n = A_m$.

Vi definerer $a_n = |A_n|$. Siden $A_{n+1} \subseteq A_n$ får vi $a_{n+1} \leq a_n$. Enhver avtagende følge i $\mathbb{N}$ er stasjonær. Velg $m \in \mathbb{N}$ slik at for $n \geq m$, $a_n = a_m$. Da er $A_n \subseteq A_m$ en delmengde med samme kardinalitet. Det gir $A_n = A_m$.

SLUTT

(Fortsettes på side 6.)