6.5 RINGKONSTRUKSJONER

EKS: For $k \in \mathbb{N}$ setter vi $k\mathbb{Z} = \{n \in \mathbb{Z} : n = l \cdot k, l \in \mathbb{Z}\}$

Vi sier nå at $n, m \in \mathbb{Z}$ er ekvivalente dersom $n - m \in k\mathbb{Z}$ og skriver $m \sim n$. Sjekk at $\sim$ er en ekvivalensrelasjon, og danner kvotienten $\mathbb{Z}_k = \mathbb{Z}/\sim$.

Vi definerer nå operasjoner på ekvivalensklasser:

$$[m] + [n] = [m+n]$$

$$[m] \cdot [n] = [m \cdot n]$$

Må sjekke at disse operasjonene er uavhengige av valg av representanter for klasser.

For eksempel: For $m' \sim m$: $m' = m + l_1 k$

$n' \sim n$: $n' = n + l_2 \cdot k$

$$m' \cdot n' = (m + l_1 k)(n + l_2 k) = mn + m l_2 k + n l_2 k + l_1 l_2 k$$

Vi ser at $(\mathbb{Z}_k, +, [0])$ er en Abelsk gruppe.

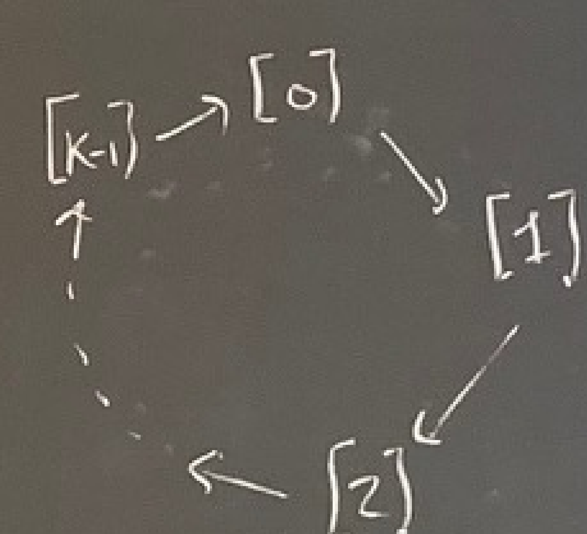
og $(\mathbb{Z}_k, \cdot, [1])$ er en Abelsk monoide,

så $(\mathbb{Z}_k, +, \cdot, [0], [1])$ er en Abelsk ring.

Vi merker oss også at $\mathbb{Z}_k$ har kardinalitet

k, med elementer $[0], [1], \dots, [k-1]$

Dette kalles en syklisk ring.



Merk at $\mathbb{Z}_k$ ikke nødvendigvis

er integritets område.

I $\mathbb{Z}_4$: $[2]\cdot[2] = [4] = 0$.

Men for p prim så er $\mathbb{Z}_p$

alltid et integritetsområde, og

mer enn det, alltid en kropp.

6.5 RINGKONSTRUKSJ

DEF 6.5.1. La A være en kommutativ ring, og la $\sim$ være en ekvivalens-relasjon på A. Da sies vi at $\sim$ er kompatibel med ringstrukturen til A, dersom $x \sim x'$ og $y \sim y'$ $\Rightarrow$ $x+y \sim x'+y'$ og $xy \sim x'y'$

for all $x, y, x', y' \in A$.

Teorem 6.5.2 Anta at A er en ring med kompatibel ekvivalensrelasjon $\sim$. Da fins en og bare en måte og definere addisjon og multiplikasjon på $A/\sim$ så

$$[x]+[y]=[x+y] \quad \text{og} \quad [x][y]=[xy].$$

Disse operasjonene gjør $A/\sim$ til en ring med nøytrale elementer $[0]$ og $[1]$. Projeksjonen $A \to A/\sim$ er en ringmorfi.

Sjekk at dette faktisk er en ring.

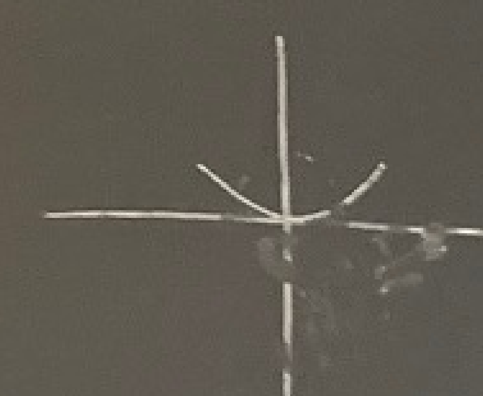
DEF 6.5.2 La A være en kommutativ ring. Et <u>ideal</u> i A er delmengde $I \subseteq A$

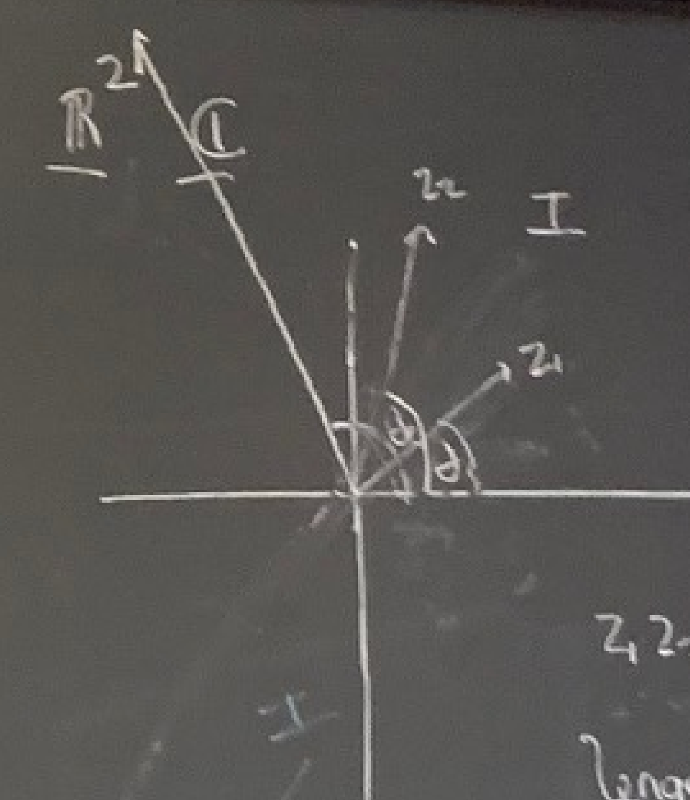
så.

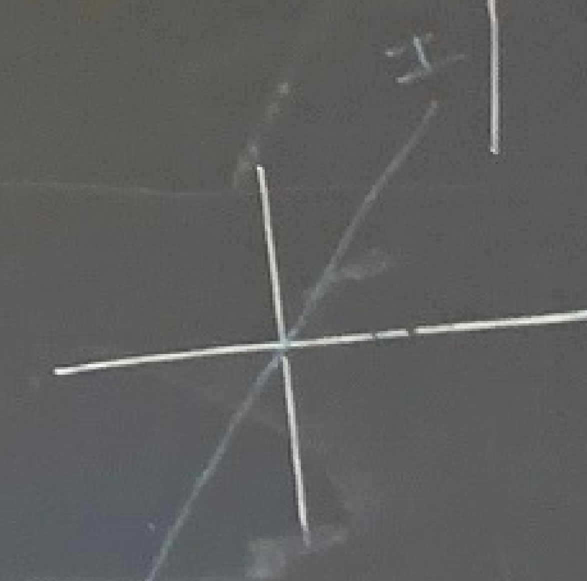
- $0 \in I$
- $x+y \in I$ for $x, y \in I$

} I er en undergruppe.

- $y \cdot x \in I$ for $x \in I$ og $y \in A$







$u+v$

$s \cdot u$ $\quad s \in \mathbb{R}$

$u \cdot v$

$z_1 z_2$ er vektoren med lengde $|z_1||z_2|$ og vinkel til $\mathbb{R}$, $\theta_1 + \theta_2$

Teorem 6.5.2. La A være en kommutativ ring.

- La $\sim$ være en kompatibel ekvivalensrelasjon på A. Da er ekvivalensklassen til 0 et ideal $I \subseteq A$ og vi har

$$x \sim y \iff x - y \in I.$$

- La $I \subseteq A$ være et ideal. Definer $x \sim y \iff x - y \in I$. Da er $\sim$ en kompatibel ekvivalens relasjon.

Kvotientkropper. La A være et integritetsområde. Vi lar $A^* = \{x \in A : x \neq 0\}$. På $A \times A^*$ innføres vi en relasjon

$$(x,y) \sim (x',y') \iff xy' = yx'.$$

Det er en ekvivalensrelasjon, og vi skriver $[(x,y)] = x/y$

$\in I$

e. Vi lar

eres vi

x'

e $[(x,y)] = x/y$

På $K = A \times A^* / \sim$ definerer vi

$$x/y + x'/y' = (xy' + yx')/yy'$$

og

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{x'}{y'} = \frac{xx'}{yy'}.$$

Disse operasjonene er veldefinerte.

Da er K en kropp og avbildningen $i(x) = x/1$ er en injektiv ringmorfi.

<u>DEF 6.3.3</u> Vi kaller K <u>kvotientkroppen</u> til A, og det er vanlig å identifisere A med $i[A] \subseteq K$.

Må vise at dersom

$(x,y) \sim (x',y') \iff xy' = yx'$ $\quad x''$

og $\quad (x',y') \sim (x'',y'') \iff x'y'' = y'x''$

Så har vi $\boxed{xy'' = yx''}$

(i) $x' = 0 \Rightarrow x = 0$

$\Downarrow$

$x'' = 0$,

(ii) $x' \neq 0$.

$yx'x'' = xy'x'' = xx'y''$

Så $\boxed{x'(\underbrace{yx'' - xy''}_{=0}) = 0}$.

$A \times A^*$