... A, B være velordnede mengder.

<u>DEF</u>: $A \simeq B$ dersom det fins en voksende bijeksjon $A \to B$.

...n og bare en av følgende holder for velordnede mengder A, B:

- $A \simeq B_x$
- $A \simeq B$
- $A_x \simeq B$

<u>DEFINER</u>: $A \preceq B$ dersom $A \simeq B$ eller $A \simeq B_x$.

Prop 5.39 A, B, C velordnede mengder.

(a) $A \preceq A$ <u>klart</u>.

(b) $A \preceq B,\ B \preceq C \Rightarrow A \preceq C$. Følger fra Prop. 5.38

(c) $A \preceq B$ og $B \preceq A \Rightarrow A \simeq B$.

$A \simeq B_y$ og $B \preceq A \Rightarrow A \simeq A_x$ motsigelse

$A \preceq B$ og $B \preceq A$
$\Rightarrow A = B$.

Teorem 5.3.10

La S være en ikke-tom mengde av velordnede mengder. Da fins en mengde $A \in S$ s.a. $A \lesssim B$ for alle $B \in S$.

Bevis: La $C \in S$ være en vilkårlig mengde.

Dersom $C \lesssim B$ for alle $B \in S$ setter vi $A = C$.

Dersom det fins B s.a. $C \not\lesssim B$.

La $A' = \{x \in C : \exists B = B(x) \text{ s.a. } B \approx C_x\}$.

Da har A' et minste element x.

Da setter vi $A = B(x)$. $\blacksquare$

La nå S være en ikke-tom mengde av velordnede mengder. Se på $S/_{\approx}$. Definer en relasjon på $S/_{\approx}$ ved at $[A] \leq [B]$ dersom $A \lesssim B$.

Da har vi en ordensrelasjon på $S/_{\approx}$, og Teorem 5.3.10 forteller oss at dette er en velorden.

Lemma 5.3.12 (Zorns lemma)

Anta at B er en ordnet mengde,
og at alle velordnede delmengder
har en øvre skranke.
Da har B minst ett maksimalt element.

Bevis: Anta at B ikke har noe
maksimalt element.
La $A \subseteq B$ være velordnet,
og la $b \in B$ være en øvre
skranke for A. Da fins
$b' > b$. Da er $b' \notin A$,
og b' er en øvre skranke for A

Utvalgsaksiomet gir: $f : W \to B$,
der W er mengden av velordnede
delmengder av B, s.a. for alle
$A \in W$ så er $f(A)$ en ovre skranke
for A og $f(A) \notin A$

Lemma 5.3.11

La B være en ordnet mengde.
Da fins en velordnet mengde
som ikke har en voksende
injeksjon i B.

Bevis. La $\mathcal{W}$ være mengde av alle
delmengder av B som er velordnede.

Da kan vi danne $A = \mathcal{W}/\approx$
og vi har en velordning på A.

Påstand: For $W \in \mathcal{W}$ har vi

$$W \approx A_{[W]}$$

Definer $\phi : W \to A$
ved $\phi(x) = [W_x]$
- injektiv siden $W_x \not\approx W_{x'}$
for $x < x'$

Surjektiv: $[X] \in A_{[W]}$
Da har vi $[X] < [W]$
Men da har $X \approx W_x$

Anta nå at $u : A \to B$ er en voksende injeksjon.

$$A \approx u_* A \approx A_{[u_* A]}$$

Motsigelse. $\blacksquare$

Fiks nå en velordnet mengde A.

Definer

$$\phi : \bigcup_{x \in A} B^{A_x} \to B \text{ partielt},$$

ved at

$$\phi(u) = f(u_* A_x)$$

dersom $u_* A_x$ er velordnet.

La $u : I \to B$ være avbildingen fra Prop 5.3.6.

Da er u en voksende injeksjon fra $I \to B$.

Påstand: $I = A$.

Hvis $I = A_x$, da er $u_* A_x$ en velordnet delmengde av B, og da ville $u \in D$. ☒

Utvalgsaksiomet gir: $f : W \to B$, der W er mengden av velordnede delmengder av B, s.a. for alle $A \in W$ så er $f(A)$ en øvre skranke for A og $f(A) \notin A$

alle

skranke

Prop. 5.36 La A være velordnet og la B være en mengde. Anta at

$$D \subseteq \bigcup_{x \in A} B^{A_x}$$

og en avbildning

$$\phi : D \to B.$$

Da fins en og bare en avbildning

$$u : I \to B,$$

der $I \subseteq A$ er en initiell mengde,

$$\forall x \in I \ (u|_{A_x} \in D) \wedge (u(x) = \phi(u|_{A_x})),$$

og hvis $I = A_x$ så har vi $u \notin D$.

6 ALGEBRA.

6.1 OPERASJONER.

DEF 6.1.1 (operasjoner) En operasjon på en mengde A er en avbilding $A \times A \to A$.

Vi betegner gjerne avbildinger ved $*$,

$$* : A \times A \to A.$$

$$(a,b) \mapsto a*b$$

EKS: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\quad (x,y) \mapsto x+y.$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\quad (x,y) \mapsto x \cdot y.$

DEF 6.1.2 La $* : A \times A \to A$ være en operasjon.

- Vi sier at $*$ er assossiativ dersom

  $\forall\, x,y,z \quad (x*y)*z = x*(y*z)$
- Vi sier at $e \in A$ er nøytral dersom $x*e = e*x = x \ \forall x \in A$
- Vi sier at x og y kommuterer hvis $x*y = y*x$.

Teorem 4.2.11. La A og B være mengder.
Da fins en injeksjon $A \to B$
eller en injeksjon $B \to A$.

Bevis: Se på mengden av injeksjoner
fra delmengder av A inn i B.
Har orden $\leq$ der $f \leq g$
dersom g e en utvidelse av f.

Da har enhver velordnet delmengde
en øvre skranke: ta union av alle
elementene i mengden.

Da fins maksimalt element f ved Zorn's Lemma
- Hvis domenet til f er A er vi ferdig.
- Hvis domenet A' ikke e A så har vi $f(A') = B$.

Da e inversen en injeksjon $B \to A$. ∎