OPERASJONER

$$A \times A \to A$$

$$(x,y) \mapsto x * y$$

$$xy$$

$e \in A$ er nøytralt element dersom $ex = x e = x$ for alle $x \in A$

Prop 6.11. Dersom det fins et nøytralt element så er det unikt.

Bevis: La e, e' være nøytrale.

$$e = ee' = e' \quad \blacksquare$$

DEF 6.13. La A være utstyrt med en assossiativ operasjon med et nøytralt element e

Vi sier at x er invertibelt dersom det fins $y \in A$ så $xy = yx = e$.

y kalles inversen til x, og betegnes gjerne med x^{-1}.

Merk: en eventuell invers er unik.

Dersom y, y' er inverser,

$$y' = y'e = y'(xy) = (y'x)y = ey = y. \checkmark$$

Merk også at hvis y er en invers til x så er x en invers til y.

Ex 1 På mengden $\mathbb{N}$ utstyrt med addisjon er det bare ett invertibelt element 0.

Ex 2 På mengden $\mathbb{Z}$ utstyrt med addisjon er alle elementer invertible.

Ex 3 På mengden $\mathbb{Z}$ utstyrt med multiplikasjon: to invertible elementer

Prop 6.12. La A være utstyrt med en assosiativ operasjon med et nøytralt element e.

Dersom x, y er invertible så er xy invertibel og $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$

V. $\begin{cases} \text{Dersom } x \text{ er invertibel så er } x^{-1} \text{ inv.} \\ \text{og } (x^{-1})^{-1} = x. \end{cases}$

Bevis

$(y^{-1}x^{-1})(xy)$

$= y^{-1}(x^{-1}(xy)) = y^{-1}(x^{-1}x)y = y^{-1}y = e$ ☐

OPERASJONER

DEF 6.1.4 La A være en mengde med en operasjon $*$. Vi sier at $B \subseteq A$ er lukket / stabil under $*$, dersom $x * y \in B$ for alle $x, y \in B$.

DEF 6.1.5: La B være utstyrt med en operasjon $*$. La A være en mengde. Da kan vi utstyre B^A med en operasjon $*$ ved å sette

$$(f * g)(x) = f(x) * g(x).$$

EKS: La $B = \mathbb{R}$ med addisjon, og la $A = [0,1]$. Da er den induserte operasjon det vi kjenner som addisjon av funksjoner

Monoider og grupper.

DEF 6.2.1: En monoide er en mengde A utstyrt med en assosiativ operasjon og en enhet.

DEF

DEF 6.25 La A være en monoide, og la $x \in A$.

Vi definerer ei følge $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ entydig induktivt ved å sette $x^0 = e$, og

$$x^{n+1} = x^n \cdot x.$$

Proposisjon 6.21 Vi har for $m, n \in \mathbb{N}$

- $x^{m+n} = x^m x^n$
- $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$
- dersom x, y kommuterer: $x^n y^n = (xy)^n$.

Bevis:

(i) Ved induksjon på n.

$n = 0$: $x^{m+0} = x^m = x^m \cdot e = x^m \cdot x^0$.

: $x^{m+n+1} = x^{(m+n)+1} = x^{m+n} \cdot x = x^m (x^n x) = x^m x^{n+1}$

(iii) $n = 0$ ok.

$$x^{n+1} y^{n+1} = x^{1+n} y^{n+1} = x x^n y^n y = x (xy)^n y = (xy)^n xy = (xy)^{n+1}. \ \square$$

Prop 6.2.2.

La A være en monoide og la $x \in A$.

Da er $B = \{x^n : n \in \mathbb{N}\}$ den minste undermonoiden av A som inneholder x, og den er kommutativ.

Bevis: • $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$,

Så B er invariant + $x^0 = e \in B$

Så B er en undermonoide.

$\therefore\ x^m \cdot x^n = x^{m+n} = x^{n+m} = x^n x^m$. ∎

Prop 6.2.2.

La A være en monoide og la $x \in A$.

Da er $B = \{x^n : n \in \mathbb{N}\}$ den minste undermonoiden av A som inneholder x, og den er <u>kommutativ</u>.

<u>Bevis:</u> • $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$,

Så B er invariant + $x^0 = e \in B$

Så B er en undermonoide.

$\therefore x^m x^n = x^{m+n} = x^{n+m} = x^n x^m$. $\blacksquare$

DEF 6.2.6. La A være en monoide og la x være et invertibelt element i A.

Da fins en unik følge $\{x^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ som tilfredsstiller $x^{n+1} = x^n x$, $n \in \mathbb{Z}$.

Sett først $x^0 = e$.

For $n \geq 0$, sett $x^{n+1} = x^n x$.

For $n < 0$, sett $x^n = x^{n+1} x^{-1}$.

Prop 6.2.3 / 6.2.4 identisk
med Prop 6.2.1, 6.2.2

MORFIER.

DEF: La $(A, *_A)$, $(B, *_B)$ være mengder utstyrt med operasjoner. En morfi fra $(A, *_A)$ til $(B, *_B)$ er avbilding $\phi : A \to B$ s.a. $\phi(x *_A y) = \phi(x) *_B \phi(y)$

Dersom A, B er monoider definerer vi en monoidemorfi

$$(A, *_A, e_A) \longrightarrow (B, *_B, e_B)$$

ved å i tillegg kreve $\phi(e_A) = e_B$.

EKS: Betrakt $(\mathbb{R}, +, 0)$ og $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot, 1)$

Se på avbildingen

$$\phi(x) = e^x$$

$\phi(0) = 1$

$\phi(x+y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ ✓

Prop 6.25 Dersom $(A, *_A)$ er en monoide, $(B, *_B)$ er en gruppe, og $\phi : (A, *_A) \to (B, *_B)$ er en morf, så er ϕ en monoidemorfi.

<u>Bevis</u>: Må vise at $\phi(e_A) = e_B$.

For alle y, $\phi(e_A) *_B y = y$.

<u>Vet</u>: $\boxed{\underbrace{\phi(e_A) *_B \phi(e_A)}_{} *_B y = \phi(e_A) *_B y}$

$= \phi(e_A *_A e_A)$

$= \phi(e_A)$

<u>DEF</u>: Dersom ethvert element i en monoide er invertibelt kaller vi det en gruppe.

$$\underbrace{\phi(e_A)^{-1} * \phi(e_A)} * \phi(e_A) * y = \phi(e_A)^{-1} \phi(e_A) * y$$

$$e_B * \phi(e_A) * y = e_B * y$$

$$\phi(e_A) * y = y$$

Gjør det samme for mult. fra høyre ∎

Prop 6.26. La $\phi : A \to B$ være en monoidemorfi.

Dersom $x \in A$ er invertibel har vi da

at $\phi(x)$ er invertibel med $\phi(x)^{-1} = \phi(x^{-1})$.

Bevis: $\phi(x^{-1}) *_B \phi(x) = \phi(x^{-1} *_A x) = \phi(e_A) = e_B$

Gjør tilsvarende med høyremultiplikasjon

med $\phi(x^{-1})$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[rr, bend right, "\psi \circ \phi"'] & B \arrow[r, "\psi"] & C \end{tikzcd}$$

DEF La $\phi : (A, *_A, e_A) \longrightarrow (B, *_B, e_B)$

være en monoide-morfi.

Definer

$$\mathrm{Ker}\,\phi = \{ x \in A : \phi(x) = e_B \}$$

$$\mathrm{Im}\,\phi = \{ \phi(x) : x \in A \}.$$

Prop. 6.2.8. Både $\mathrm{Ker}\,\phi$ og $\mathrm{Im}\,\phi$ undermonoider.

Bevis: (i) $\phi(e_A) = e_B$,

så $\mathrm{Ker}\,\phi$ inneholder nøytralt element.

$x, y \in \mathrm{Ker}\,\phi$, $\phi(x *_A y) = \phi(x) *_B \phi(y)$

$= e_B *_B e_B = e_B$.

∎