1

RINGER OG KROPPER

DEF. 6.3.1. La A være en mengde med to avbildinger

$$+ \begin{cases} A \times A \to A \\ (x,y) \mapsto x+y \end{cases} \qquad \times \begin{cases} A \times A \to A \\ (x,y) \mapsto xy \end{cases}$$

og med to utvalgte elementer 0 og 1.

Vi sier at $(A,+,\times,0,1)$ er en <u>ring</u> dersom

- addisjon er assossiativ, kommutativ, har nøytralt element 0, og hvert element x har en invers $-x$ } $(A,+,0)$ er en kommutativ gruppe.
- multiplikasjon er assossiativ med nøytralt element 1. } $(A,\times,1)$ er en monoide

2

- multiplikasjon distribuerer over addisjon

  $z(x+y) = zx + zy$, $(x+y)z = xz + yz$

Prop 6.3.1 I en ring har vi

- Dersom $0'$ er et nøytralt element for addisjon så er $0' = 0$.
- Additive inverser er unike
- Vi har $-(x+y) = -x - y$
- Vi har $x+z = y+z \iff x = y$
- Dersom $1'$ er nøytralt for mult. så er $1' = 1$.
- Gitt $x \in A$ så del finn $y \in A$ så $xy = yx$

  Så sier vi at x er invertibel, og i så fall er y entydig bestemt, og y er invertibel.
- x, y invertible $\Longrightarrow$ $x \cdot y$ er inv. med inv. $y^{-1}x^{-1}$

3

Prop 6.32 I en ring har vi

- $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$
- $(-x)y = x(-y) = -xy$, $(-x)(-y) = xy$
- Hvis x er invertibel så er $-x$ invertibel og $(-x)^{-1} = -x^{-1}$

(i) $0x + 0x = (0+0)x = 0 \cdot x$

Så $0 \cdot x = 0$.

(ii) $xy + (-x)y = (x - x)y = 0$.

(iii) $-x^{-1} \cdot (-x) = x^{-1}(--x)$

$= x^{-1}x = 1$

DEF 6.33 La A være en ring.

- Vi sier at A er trivielt dersom $0 = 1$.
- Vi sier at A er kommutativ dersom $\times$ er kommutativ
- Vi sier at A er et integritetsområde dersom $xy = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$

4

- Vi sier at A er en kropp dersom A er ikke trivell kommutativ og dersom alle $x \neq 0$ har en invers.

Kropp $\Rightarrow$ Integritetsområde

EKS $\mathbb{Z}, +, \cdot$ er en ring, kommutativ, $1 \neq 0$

$\mathbb{Q}$ er en kropp

$M(2)$ mengden av 2×2 matriser med koeffisienter i $\mathbb{R}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1' & a_2' \\ a_3' & a_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+a_1' & a_2+a_2' \\ a_3+a_3' & a_4+a_4' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1' & a_2' \\ a_3' & a_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a_1' + a_2a_3' & a_1a_2' + a_2a_4' \\ a_3a_1' + a_3a_3' & a_3a_2' + a_2a_4' \end{bmatrix}$$

5

La A være mengden av kontinuerlig funksjoner $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og definer addisjon og multiplikasjon punktvis.

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$(f \cdot g)(x) = f(x)\, g(x)$

$= g(x) \cdot f(x) = (g \cdot f)(x)$

$\mathbb{R}$ er en kropp

Men $f(x) = x^2$ har vi $f \neq 0$, for

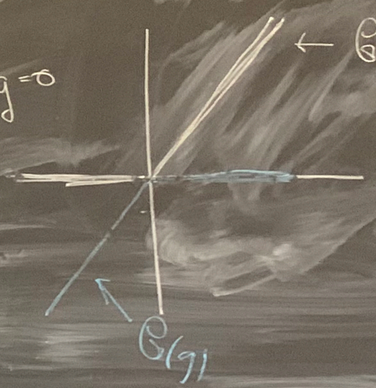
men f har ingen multiplikativ invers.

Integritets-område?

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & x \geq 0. \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ x & x \leq 0. \end{cases}$$

$f \cdot g = 0$

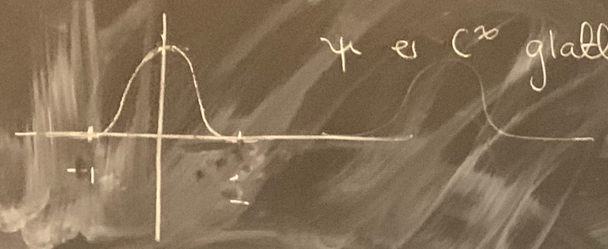


6

Define

$$\psi(t) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{1-t^2}} \\ 0 \quad \text{for } t \le -1,\ t \ge 1. \end{cases}$$

ψ er C^∞ glatt.



$C^\infty(\mathbb{R})$ er hellri ikke integritsområde.

- Mengde av analytiske funksjon.
- Mengden av polynomer gir integritetsområde.

7 Ordnede ringer.

DEF 6.33 La A være en kommutativ ring, som er utstyrt med en orden $\leq$. Vi sier at ordenen er kompatibel med ringoperasjonene dersom

$$x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z$$
$$0 \leq x \wedge 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq xy$$

En ordnet ring er en ring med en orden som er kompatibel med ringoperasjonene.

Prop 6.33. I en ikke-triviell totalt ordnet ring har vi,

- $x \geq 0 \Leftrightarrow -x \leq 0$
- $\forall x,\ x^2 \geq 0$
- $0 < 1$
- Hvis $x \leq y$ og $z \geq 0$ så har vi $xz \leq yz$.
- Hvis $0 \leq x \leq y$ og $0 \leq x' \leq y'$ så har vi $0 \leq xx' \leq yy'$
- Hvis x, y er invertible

8

og $0<x\leq y$ sa har vi

$0<y^{-1}\leq x^{-1}$.

Bevis: (i) $x \geq 0 \Rightarrow x-x \geq 0-x$

andre vei gir $\Leftarrow$ " "

$0 \geq -1$

- Hvis $x\geq 0, y\geq 0, x+y=0$,
  sa er $x=y=0$.

(ii) Gitt x. Dersom $x\geq 0$ sa er $x\cdot x\geq 0$.

Dersom $x<0$. $x\cdot x = (-x)(-x) > 0$.

DEF 6.3.4 La A, A' vare ringer.

En ringmorfi er en avbildning

$\phi : A \to A'$ som er

en monoidmorfi med hensyn

på addisjon og multiplikasjon.

9 6.4 SUMMETEGN.

DEF 6.4.1. La A vere en gruppe.

Vi definerer summen til en

følge $\{u_k\}_{k\in[m,n]}$, $m\le n$, ved induksjon

på n, ved å sette

$$\sum_{k=m}^{m} u_k = u_m,$$

$$\sum_{k=m}^{n+1} u_k = \left(\sum_{k=m}^{n} u_k\right) + u_{n+1}.$$

Prop. 6.4.1. For $m\le l\le n$

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{l} u_k + \sum_{k=l+1}^{n} u_k$$

Prop. 6.4.2.

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m-l}^{n-l} u_{k+l}$$

$$\sum_{k=m}^{n} (u_k+v_k) = \sum_{k=m}^{n} u_k + \sum_{k=m}^{n} v_k$$

og i en ring

$$\sum_{k=n}^{m} v\cdot u_k = v\cdot \sum_{k=m}^{n} u_k.$$

10

Prop 6.43. La x, y vare kommuterende elementer i en ring. Da har vi, for $n \in \mathbb{N}^*$

$$x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k$$

Eks: $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$.

Bevis:

$$(x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k = \sum_{k=0}^{n-1} (x-y) x^{n-1-k} y^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k} y^k - x^{n-1-k} \cdot y^{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k} y^k - \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k} y^k - \sum_{k=1}^{n} x^{n-k} y^k = x^n - y^n$$