UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1140 — Strukturer og argumenter
Eksamensdag:	Torsdag 19. januar 2023
Tid for eksamen:	09.00 – 13.00

Oppgavesettet er på 4 sider.

Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen hjelpemidler tillatt.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Gjennom hele besvarelsen må alle svar begrunnes på en klar og tydelig måte dersom de skal gi uttelling.

Oppgave 1 (vekt 10%)

Hva vil det si at sammensatte uttrykk A og B er tautologisk ekvivalente?
Vi definerer følgende sammensatte utsagn A og B:

$$A = (P \Rightarrow (Q \Rightarrow R))$$

og

$$B = (Q \Rightarrow (P \Rightarrow R))$$

Er A og B tautologisk ekvivalente?

Løsning: Vi har at

$$\begin{aligned} P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) &\Leftrightarrow \neg P \vee (Q \Rightarrow R) \\ &\Leftrightarrow \neg P \vee (\neg Q \vee R) \\ &\Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \vee R \end{aligned}$$

Bytter vi om på rollene til P og Q får vi

$$Q \Rightarrow (P \Rightarrow R) \Leftrightarrow \neg Q \vee \neg P \vee R$$

Siden $\vee$ er kommutativ ser vi at de to uttrykkene er tautologisk ekvivalente.

Oppgave 2 (vekt 30%)

La A, B og C være mengder, og la $f : A \to B, g : B \to C$ være avbildinger.

(Fortsettes på side 2.)

a (vekt 10%)

Vis at dersom både f og g er surjektive så er komposisjonen $g \circ f$ surjektiv.

Løsning:
La $c \in C$. Siden g er surjektiv fins $b \in B$ med $g(b) = c$. Siden f er surjektiv fins $a \in A$ med $f(a) = b$. Da har vi

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c.$$

b (vekt 10%)

Anta fra nå av at $B = A$ slik at vi har en avbilding $f : A \to A$.

Anta at f er surjektiv. Vis, ved induksjon på $n \in \mathbb{N}$, at komposisjonen

$$f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ ganger}} \circ \mathrm{id}_A$$

er surjektiv for alle $n \in \mathbb{N}$.

Løsning:
For $n = 0$ har vi at $f^n = \mathrm{id}_A$, så dette tilfellet er klart.

Anta så at påstanden holder for $n \in \mathbb{N}$. Vi har da at $f^{n+1} = f \circ f^n$, og siden f og f^n nå er surjektive følger det fra **a** at f^{n+1} er surjektiv.

c (vekt 10%)

Vis at dersom f^n er surjektiv for en $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, så er f surjektiv.

Løsning: Anta at f ikke er surjektiv. Da fins $y \in A$ slik at $f(x) \neq y$ for alle $x \in A$. For alle $n \geq 2$ og $z \in A$ har vi da at $f^n(z) = f(f^{n-1}(z)) \neq y$, så f^n er ikke surjektiv.

Oppgave 3 (vekt 20%)

a (vekt 10%)

Bruk Euklids algoritme til å finne største felles divisor $(195, 231)$. Skriv $(195, 231)$ som en lineær kombinasjon av 195 og 231.

Løsning:

$$231 = 1 \cdot 195 + 36$$

$$195 = 5 \cdot 36 + 15$$

$$36 = 2 \cdot 15 + 6$$

$$15 = 2 \cdot 6 + 3$$

$$6 = 2 \cdot 3$$

(Fortsettes på side 3.)

Vi ser da at $(195, 231) = 3$.

Videre har vi at

$$\begin{aligned} 3 &= 15 - 2 \cdot 6 = 15 - 2 \cdot (36 - 2 \cdot 15) = 5 \cdot 15 - 2 \cdot 36 \\ &= 5 \cdot (195 - 5 \cdot 36) - 2 \cdot 36 = 5 \cdot 195 - 27 \cdot 36 \\ &= 5 \cdot 195 - 27 \cdot (231 - 195) = 32 \cdot 195 - 27 \cdot 231 \end{aligned}$$

b (vekt 10%)

Finn alle løsninger til ligningen $\overline{195}\overline{x} = \overline{6}$ i $\mathbb{Z}_{231}$.

Løsning:
Fra **a** ser vi at $2 \cdot 32 = 64$ er en løsning. Da vet vi at løsningene er

$$64 + k \cdot \frac{231}{3} = 64 + k \cdot 77, k = 0, 1, 2.$$

Oppgave 4 (vekt 20%)

La $\preceq$ være en relasjon på $\mathbb{N}_{\geq 2}$ definert som følger. La $m = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k$ og $n = q_1 \cdot q_2 \cdots q_l$ være primtallsfaktoriseringer av henholdsvis m og n, der $p_j \leq p_{j+1}$ og $q_j \leq q_{j+1}$. Vi sier at $m \preceq n$ dersom $k \leq l$ og $p_j = q_j$ for $j = 1, ..., k$.

a (vekt 10%)

Vis at $\preceq$ er en ordensrelasjon på $\mathbb{N}_{\geq 2}$.

Løsning: Det er klart at $\leq$ er refleksiv. Anta videre at $k \preceq m \preceq n$, og la

$$k = p_1 \cdots p_{l_k}, m = q_1 \cdots p_{l_m}, n = r_1 \cdots r_{l_n},$$

være faktoriseringer som over. For det første har vi da at $l_k \leq l_m \leq l_n$, så $l_k \leq l_n$. Videre har vi at $p_j = q_j$ for $j \leq l_k$, og $q_j = r_j$ for $j \leq l_k \leq l_m$, så $p_j = r_j$ for $j \leq l_k$. Dette viser at $k \preceq n$, så $\preceq$ er transitiv.

Anta til slutt at $k \preceq m$ og $m \preceq k$ og skriv

$$k = p_1 \cdots p_{l_k}, m = q_1 \cdots p_{l_m}.$$

Siden $l_k \leq l_m$ og $l_m \leq l_k$ har vi da at $l_k = l_m$, og det følger at $p_j = q_j$ for $j \leq l_k = l_m$. Så $k = m$.

b (vekt 10%)

Er $\preceq$ en velorden?

Løsning: Nei, hvis p, q er primtall har vi verken $p \preceq q$ eller $q \preceq p$, så $\preceq$ er ikke engang total.

(Fortsettes på side 4.)

c (vekt 10%)

Vis at enhver ikke-tom delmengde av $\mathbb{N}$ har et minimalt element med hensyn på denne ordningen.

Løsning: For en ikke-tom delmengde A lar vi k_A være det minste naturlige tallet (med hensyn på standard ordning på $\mathbb{N}$) slik at det fins $n \in A$ med k_A elementer i primtallsfaktoriseringen av n. La $B \subset A$ være delmengden av A bestående av tall med k_A primtallfaktorer.

For det første vil nå ethvert element $n \in B$ være minimalt i mengden B, for hvis $m \in B$ og $m \preceq n$ så har vi $m = n$.

Og for enhver $m \in A \setminus B$ kan vi ikke ha $m \preceq n$ fordi m har flere primtallsfaktorer enn n.

Oppgave 5 (vekt 10%)

La A være en ikke-tom totalt ordnet mengde som ikke har noe minste element. Vis at det fins en strengt avtagende avbilding $f : \mathbb{N} \to A$.

Løsning: For alle $x \in A$ setter vi

$$A_x = \{y \in A : y < x\}.$$

Da er hver mengde A_x ikke-tom siden A ikke har noe minste element. Ved utvalgsaksiomet fins da en avbilding $g : A \to A$ slik at $g(x) \in A_x$ for alle $x \in A$.

Vi definerer nå en avbilding f induktivt. Først lar vi $f(0) = x_0$ være vilkårlig. Anta så at vi har konstruert $f(n)$ for $n \geq 0$. Vi setter $f(n+1) = g(f(n))$. Dette definerer en avbilding $f : \mathbb{N} \to A$.

Per konstruksjon har vi nå at $f(n+1) \in A_{f(n)}$ som betyr at $f(n+1) < f(n)$, for alle $n \in \mathbb{N}$. Det følger fra dette at f er strengt avtagende.

SLUTT