UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1140 — Strukturer og argumenter
Eksamensdag:	Tirsdag 13. desember 2022
Tid for eksamen:	15.00 – 19.00
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen hjelpemidler tillatt.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Gjennom hele besvarelsen må alle svar begrunnes på en klar og tydelig måte dersom de skal gi uttelling.

Oppgave 1 (vekt 10%)

La P, Q og R være utsagn. Avgjør om

$$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$$

er en tautologi.

Løsningsforslag: Vi sjekker om det er mulig å gjøre det sammensatte uttrykket usant. Da er det nødvendig at $P \Rightarrow R$ er usann, og da har vi at R er usann og P er sann. Lar vi da Q være usann blir $Q \Rightarrow R$ sann, og siden alt impliserer noe sant blir $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow R))$ sann. Dermed er det sammensatte uttrykket med disse valg av sannhetsverdier usant, og vi har ikke en tautologi.

Oppgave 2 (vekt 10%)

La A, B og C være mengder. Har vi nødvendigvis at

$$((A \subseteq B \setminus C) \wedge (B \subseteq C \setminus A)) \Rightarrow B = \emptyset?$$

Løsningsforslag: Nei, for vi kan ha at $A = \emptyset$ og $B \subseteq C$ med $B \neq \emptyset$.

Oppgave 3 (vekt 30%)

a (vekt 10%)

Bruk Euklids algoritme for a finne største felles faktor $(45, 105)$.

Løsningsforslag:

(Fortsettes på side 2.)

$$105 = 2 \cdot 45 + 15$$

$$45 = 3 \cdot 15$$

Så største felles faktor er 15.

b (vekt 10%)

Finn alle løsninger av ligningen

$$45x + 105y = 30$$

med $x, y \in \mathbb{Z}$.

Løsningsforslag: Fra **a** ser vi at $15 = -2 \cdot 45 + 105$, og dermed har vi at $30 = -4 \cdot 45 + 2 \cdot 105$. Så $x = -4, y = 2$ er en løsning. Da vet vi at alle løsninger er gitt ved

$$x_k = -4 + k \cdot \frac{105}{15}, y_k = 2 - k \cdot \frac{45}{15}, k \in \mathbb{Z}.$$

c (vekt 10%)

Finn alle løsninger til ligningen

$$\overline{45}\overline{x} = \overline{30}$$

i ringen $\mathbb{Z}/(105)$ (her betegner $\overline{n}$ ekvivalensklassen til et heltall n).

Løsningsforslag: Vi vet at $x_k = \overline{-4 + k \cdot \frac{105}{15}}$ for $k = 0, 1, ..., 14$ gir alle løsningene.

Oppgave 4 (vekt 20%)

La $f : A \to B$ være en injektiv avbilding, og anta at vi er gitt en ordensrelasjon $\leq_B$ på B. På A definerer vi en relasjon $\leq_A$ ved

$$x \leq_A y \Leftrightarrow f(x) \leq_B f(y).$$

a (vekt 10%)

Vis at $\leq_A$ er en ordensrelasjon på A.

Løsningsforslag: (i) Siden $f(x) \leq_B f(x)$ har vi at $x \leq_A x$. (ii) Dersom $x \leq_A y$ og $y \leq_A z$ har vi at $f(x) \leq_B f(y)$ og $f(y) \leq_B f(z)$, så vi har at $f(x) \leq_B f(z)$. Da har vi at $x \leq_A z$. (iii) Dersom $x \leq_A y$ og $y \leq_A x$ har vi at $f(x) \leq_B f(y)$ og $f(y) \leq_B f(x)$. Det følger at $f(x) = f(y)$. Siden f er injektiv har vi at $x = y$.

(Fortsettes på side 3.)

b (vekt 10%)

Vis at om $\leq_B$ er en velorden, så er $\leq_A$ en velorden. Er det nødvendigvis slik at dersom $\leq_A$ er en velorden, så er $\leq_B$ en velorden?

Løsningsforslag: (i) La $C \subset A$ være en ikke-tom mengde. Da er $f(C) \subset B$ en ikke-tom mengde, og siden $\leq_B$ er en velorden har vi at $f(C)$ har et minste element c. Vi betrakter $a \in A$ med $f(a) = c$. For alle $x \in C$ har vi at $f(a) \leq_B f(x)$, og det følger at $a \leq_A d$. Det følger at a er det minste elementet i C.

(ii) Nei. La $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ være gitt ved inklusjonen, det vil si $f(n) = n$. Da vil $\leq_{\mathbb{N}}$ være standard orden for $\mathbb{N}$, og den er en velorden. Men standard orden for $\mathbb{R}$ er ingen velorden.

Oppgave 5 (vekt 30%)

La $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ være en avbilding, og anta at f er voksende.

a (vekt 10%)

Vis at dersom $f^2 = f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ så har vi $f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.

Løsningsforslag: Anta at $f^2 = f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. For $x \in \mathbb{N}$ har vi $f(x) \geq x$. For dersom $f(x) < x$ har vi at $f(f(x)) \leq f(x) \Rightarrow x \leq f(x)$ som blir en motsigelse. Videre, dersom $f(x) > x$ har vi at $f(f(x)) \geq f(x) > x$. Det følger at $f(x) = x$.

Anta fra nå av at f er strengt voksende.

b (vekt 10%)

Sett $A = f[\mathbb{N}]$ og la $g : A \to \mathbb{N}$ være den inverse avbildingen til f. Vis at g er strengt voksende.

Løsningsforslag: La $x, y \in A$ med $x < y$. Anta for motsigelse at $g(y) \leq g(x)$. Siden f er voksende har vi da at $f(g(y)) \leq f(g(x))$ som betyr at $y \leq x$.

c (vekt 10%)

Definer en følge $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ved $x_k = f(k)$. Bevis, ved induksjon på n, at for alle $n \in \mathbb{N}$ finnes $k \in \mathbb{N}$ slik at $x_k > n$; det vil si at $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ er ubegrenset.

Løsningsforslag: Vi starter med $n = 0$. Siden $f(0) \geq 0$ har vi at $f(1) > f(0) \geq 0$. Vi kan sette $k = 1$.

Anta at påstanden holder for $n \in \mathbb{N}$. Da finnes k slik at $f(k) > n \Rightarrow f(k) \geq n + 1$. Da har vi at $f(k + 1) > f(k) \geq n + 1$.

SLUTT