25. oktober 2022

MAT1140

Obligatorisk oppgave 1 av 2

Innleveringsfrist

Torsdag 6. oktober 2022, klokken 14:30 i Canvas (canvas.uio.no).

Instruksjoner

Merk at man har **ett forsøk** på å få oppgaven godkjent. Dette betyr at det ikke lenger gis andregangsforsøk.

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og oblignummer.

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Husk å inkludere alle relevante plott og figurer. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

I oppgaver der du blir bedt om å programmere må du legge ved programkoden og levere den sammen med resten av besvarelsen. Det er viktig at programkoden du leverer inneholder et kjøreeksempel, slik at det er lett å se hvilket resultat programmet gir.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) senest samme dag som innleveringsfristen.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

LYKKE TIL!

Oppgave 1. Vis at for utsagn P, Q, R så er

$$((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$$

en tautologi.

Løsningsforslag: Utsagnet kan bare være usant dersom $P \Rightarrow R$ er usant, det vil si at R er usant mens P er sant. Videre må $Q \Rightarrow R$ være sant, og det følger at Q må være usant. Men da blir $P \Rightarrow Q$ usant. Dette viser at det ikke er mulig å velge sannhetsverdier for P, Q, R slik at utsagnet blir usant.

Oppgave 2. Vis at for alle predikater P, Q så holder følgende.

(i) $(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \Leftrightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(x))$

(ii) $[\forall x (P(x) \Rightarrow Q(x))] \Rightarrow [\forall x P(x) \Rightarrow \forall x Q(x)]$

Holder den motsatte implikasjonen i (ii)? Gi et bevis eller finn et moteksempel.

Fins det noen implikasjoner mellom utsagnene

(iii) $\exists x (P(x) \Rightarrow Q(x))$, og

(iv) $\exists x P(x) \Rightarrow \exists x Q(x)$?

Løsningsforslag: (i) Vi viser ekvivalens av negasjonene i stedet. Vi har

$$\begin{aligned}
\neg(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) &\Leftrightarrow \neg \forall x P(x) \vee \neg \forall x Q(x)) \\
&\Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \vee \exists x \neg Q(x) \\
&\Leftrightarrow \exists x \neg (P(x) \wedge Q(x)) \\
&\Leftrightarrow \neg \forall x (P(x) \wedge Q(x))
\end{aligned}$$

(ii) Vi viser

$$\neg[\forall x P(x) \Rightarrow \forall x Q(x)] \Rightarrow \neg[\forall x (P(x) \Rightarrow Q(x))].$$

Vi har at

$$[\forall x P(x) \Rightarrow \forall x Q(x)] \Leftrightarrow \neg(\forall x P(x) \wedge \neg \forall x Q(x))$$

og vi får at

$$\neg[\forall x P(x) \Rightarrow \forall x Q(x)] \Leftrightarrow (\forall x P(x) \wedge \exists x \neg Q(x)).$$

Fikser så x slik at $\neg Q(x)$. Da blir $P(x) \Rightarrow Q(x)$ usann, siden $P(x)$ er sann. Det vil si

$$\exists x \neg(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow \neg[\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))].$$

Relasjoner mellom (iii) og (vi). Vi danner negasjonene:

$$\neg(iii) = \forall x \neg(\neg(P(x) \land \neg Q(x))) \Leftrightarrow \forall x P(x) \land \neg Q(x) \Leftrightarrow \forall x P(x) \land \forall x \neg Q(x).$$

$$\neg(iv) = \neg(\neg(\exists x P(x) \land \neg \exists x Q(x)) \Leftrightarrow \exists x P(x) \land \neg \exists x Q(x) \Leftrightarrow \exists x P(x) \land \forall x \neg Q(x)$$

Da ser vi at $\neg(iii) \Rightarrow \neg(iv)$, altså også $(iv) \Rightarrow (iii)$, men vi har ikke den motsatte implikasjonen.

Oppgave 3. Vis at for mengder A, B og C så har vi at

$$A \subseteq B \land B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C.$$

Løsningsforslag: Anta at $x \in A$. Siden $\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$ har vi da $x \in B$. Siden $\forall x, x \in B \Rightarrow x \in C$ har vi da $x \in C$. Derfor har vi $\forall x, x \in A \Rightarrow x \in C$.

Oppgave 4. La U, V være mengder, og la $f : U \to V$ være en avbilding. Vis at dersom $V = \emptyset$ så er f injektiv. Vis at dersom f ikke er injektiv, så inneholder U minst to elementer.

Løsningsforslag: At $f = (U, V, G)$ er injektiv betyr per definisjon

$$\forall x, x' \in U, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x' \Leftrightarrow \forall x, x' \in U, (x, y), (x', y) \in G \Rightarrow x = x'$$

Dette holder alltid dersom $V = \emptyset$. At f ikke er injektiv betyr videre

$$\exists x, x' \in U, (f(x) = f(x')) \land \neg(x = x')$$

Spesielt

$$\exists x, x' \in U, x \neq x'.$$

Oppgave 5. La U, V være mengder, og la $f : U \to V$ være en avbilding. La $A \subseteq U$.

(i) Vis at dersom f er injektiv så har vi

$$f[\mathcal{C}_U(A)] \subseteq \mathcal{C}_V(f[A]).$$

(ii) Vis at dersom f er surjektiv så har vi

$$f[\mathcal{C}_U(A)] \supseteq \mathcal{C}_V(f[A]).$$

(iii) Vis at dersom f ikke er injektiv så fins alltid en mengde $B \subset U$ slik at

$$f[\mathcal{C}_U B)] \subseteq \mathcal{C}_V(f[B]).$$

ikke holder.

(iv) Vis at dersom f ikke er surjektiv så fins alltid en mengde $B \subset U$ slik at

$$f[\mathcal{C}_U(B)] \supseteq \mathcal{C}_V(f[B]).$$

ikke holder.

Løsningsforslag: (i) La $x \in \mathcal{C}_U(A)$ og sett $y = f(x)$. Dersom $y \in f[A]$ fins $x' \in A$ med $f(x') = y$. Men da er $x \neq x'$ og $f(x) = f(x')$, så f ville ikke vært injektiv.

(ii) La $y \in \mathcal{C}_V(f[A])$. Siden f er surjektiv fins x med $y = f(x)$. Da er $x \in \mathcal{C}_U(A)$, så $y \in f[\mathcal{C}_U(A)]$.

(iii) Hvis f ikke er injektiv har vi sett i Oppgave 4 at det fins $x, x' \in U, x \neq x'$, og $f(x) = f(x')$. Sett $A = \{x\}$.

(iv) La $y \notin f[U]$, og sett $A = \emptyset$. Da har vi $f[\mathcal{C}_U(A)] = f[U]$.

Oppgave 6. La $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ være en voksende følge i $\mathbb{N}$ slik at $u_k \leq n \in \mathbb{N}$ for alle k. Vis ved induksjon på $n \in \mathbb{N}$ at det fins $m \in \mathbb{N}$ slik at $u_k = u_m$ for alle $k \geq m$.

Løsningsforslag: Dersom $n = 0$ har vi $0 \leq u_k \leq 0$ for alle k så vi setter $m = 0$.

Anta at påstanden holder for $n \in \mathbb{N}$. Dersom $u_m = n + 1$ for en $m \in \mathbb{N}$ så har vi $n + 1 \leq u_k \leq n + 1$ for alle $k \geq m$. Dersom $u_m \leq n$ for alle m bruker vi induksjonshypotesen.