24. november 2022

MAT1140

Obligatorisk oppgave 2 av 2

Innleveringsfrist

Torsdag 3. november 2022, klokken 14:30 i Canvas (canvas.uio.no).

Instruksjoner

Merk at man har **ett forsøk** på å få oppgaven godkjent. Dette betyr at det ikke lenger gis andregangsforsøk.

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og oblignummer.

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Husk å inkludere alle relevante plott og figurer. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

I oppgaver der du blir bedt om å programmere må du legge ved programkoden og levere den sammen med resten av besvarelsen. Det er viktig at programkoden du leverer inneholder et kjøreeksempel, slik at det er lett å se hvilket resultat programmet gir.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) senest samme dag som innleveringsfristen.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

LYKKE TIL!

Oppgave 1. For en $A \subset \mathbb{N}$ lar vi $P(A)$ være utsagnet "A har et minste element". La

$$B = \{n \in \mathbb{N} : \forall A \subset \mathbb{N}, n \in A \Rightarrow P(A)\}$$

(a) Bevis at $B = \mathbb{N}$.

(b) Bevis at $\mathbb{N}$ er velordnet.

Løsningsforslag:

(a) Vi viser nå ved induksjon at $\mathbb{N}_n \subset B$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Det er klart at $\mathbb{N}_0 \subset B$, og det er klart at $0 \in B$ siden 0 er det minste elementet i $\mathbb{N}$, så $\mathbb{N}_1 \subset B$.

Anta så at $\mathbb{N}_n \subset B$ for $n \geq 1$. La $A \subset \mathbb{N}$ og anta at $n+1 \in A$. En mulighet er at $n+1$ er det minste elementet i B. Hvis ikke fins $k \leq n$ med $k \in A$ så det følger at A har et minste element.

(b) La $A \subset \mathbb{N}$ være en ikke-tom delmengde. Da fins $n \in A$. Det følger fra (a) at A har et minste element.

Oppgave 2. I denne oppgaven skal vi gi et bevis for at for en uendelig mengde $A \subset \mathbb{N}$ så fins en unik voksende bijeksjon $f : \mathbb{N} \to A$.

Vi starter med å si at $m \in A$ er en tillatt verdi i $n \in \mathbb{N}$ dersom det fins en voksende injeksjon $f : \mathbb{N}_{n+1} \to A$ slik at $f(\mathbb{N}_{n+1})$ er en initiell delmengde av A og $f(n) = m$. I så fall sier vi ogå at n er et tillatt element. (En mengde $B \subset A$ er initiell dersom $k \in B \Rightarrow l \in B$ for alle $l \in A$ med $l \leq k$.)

(a) Bevis at en voksende injeksjon er strengt voksende.

(b) Anta at $f : \mathbb{N}_{n+1} \to A$ er en voksende injeksjon slik at $f(\mathbb{N}_{n+1})$ er en initiell delmengde av A. Vis at for $k \leq n$ så er $f(\mathbb{N}_k)$ en initiell delmengde av A. Konkluder med at alle $k \leq n$ er tillatte elementer.

(c) Vis at dersom $f, g : \mathbb{N}_{n+1} \to A$ er voksende injeksjoner med initielle bilder, så er $f = g$.

(d) Vis at det fins en unik voksende bijeksjon $f : \mathbb{N} \to B$.

Løsningsforslag:

(a) Dersom $f : \mathbb{N}_{n+1} \to A$ er en voksende injeksjon har vi $k \leq l \Rightarrow f(k) \leq f(l)$. At f er strengt voksende betyr at $k < l \Rightarrow f(k) < f(l)$. Så at f ikke er strengt voksende betyr at det fins $k < l$ med $f(l) \leq f(k)$, og kombinerer vi med $f(k) \leq f(l)$ får vi $f(k) = f(l)$. Det motsier at f er injektiv.

(b) Anta for å få en motsigelse at $f(\mathbb{N}_k)$ ikke er initiell for $1 \leq k \leq n$. Da fins $a \in A$ med $a < f(k-1)$ og $a \notin f(\mathbb{N}_k)$. Men $f(m) > f(k-1)$ for alle $m > k-1$ så da har vi $a \notin f(\mathbb{N}_{n+1})$.

For alle $k \leq n$ har vi at $f_k = f|_{\mathbb{N}_{k+1}}$ er en voksende injeksjon. Vi har at $f(\mathbb{N}_{k+1})$ er en initiell delmengde av A. Da er $f(k)$ en tillatt verdi i k og k er et tillatt element.

(c) Dersom $f \neq g$ fins et minste element $k \in \mathbb{N}_{n+1}$ slik at $f(k) \neq g(k)$. Da kan vi anta at $f(k) < g(k)$, og dermed er $g(k') \neq f(k)$ for alle $k' \geq k$. Men siden $f(k') = g(k')$ for alle $k' < k$ har vi også $g(k') \neq f(k)$ for alle $k' < k$. Men da er ikke $g(\mathbb{N}_{n+1})$ initiell.

(d) La $B \subset \mathbb{N}$ være mengden av tillatte elementer. Vi påstår at $B = \mathbb{N}$. Hvis ikke har $\mathbb{N} \setminus B$ et minste element n. Da er $n \neq 0$ siden vi kan sette $f(0) =$ det minste elementet i A. La så $f : \mathbb{N}_n \to A$ være en voksende injeksjon med initielt bilde. Utvid f ved å sette $f(n) =$ minste element i $A \setminus f(\mathbb{N}_n)$. Da er $f : \mathbb{N}_{n+1} \to A$ en voksende injeksjon med initielt bilde, så n er et tillatt element.

Vi vet nå et vert element $n \in \mathbb{N}$ er tillatt, og bruker vi (c) vet vi at vi har en unik tillatt verdi i n. Definer $g : \mathbb{N} \to A$ ved å sette $g(n) =$ den unike tillatte verdien i n.

La nå g_n være restriksjonen av g til $\mathbb{N}_{n+1}$. La $f : \mathbb{N}_{n+1} \to A$ være den unike voksende injeksjonen med initielt bilde. Da er $f(n) = g_n(n)$, og det følger videre fra (b) at $g_n = f$. Det følger nå at g er en voksende injeksjon, siden hver g_n er det. Det følger også at g er surjektiv, for hvis $m \in A$ ikke er i $g(\mathbb{N})$ så kan vi velge n slik at $g(n) > m$, men da får vi at $g_n(\mathbb{N}_n)$ ikke er initiell. Til slutt følger det at g er unik, fordi restriksjonen av enhver slik g til $\mathbb{N}_n$ er en voksende injeksjon med initielt bilde.