STRUKTURER OG ARGUMENTER - REPETISJONSOPPGAVER

E. F. WOLD

1. 22 Novemer

Oppgave 1

La P, Q, R være utsagn. Vi antar at følgende utsagn er sant:

$$((P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)) \Rightarrow R.$$

Følger det da at R er sant?

Oppgave 2

La A, B, C være mengder. Vis at man ikke kan ha

$$(A \subset B) \wedge (B \subset C) \wedge (C \subset A).$$

Oppgave 3

La P og Q være utsagn. Vi antar at følgende utsagn er sant:

$$(P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)).$$

Følger det da at utsagnet $P \Leftrightarrow Q$ må være sant?

Løsning:

$$\neg(P \wedge \neg(\neg(Q \wedge \neg P)) \Leftrightarrow \neg(P \wedge (Q \wedge \neg P))$$

Oppgave 4

La A og B være mengder. Anta at

$$A \cap B = A \cup B.$$

Vis at $A = B$.

Oppgave 5

La P, Q og R være utsagn. Sjekk om følgende utsagn er en tautologi:

$$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow R) \Leftrightarrow (P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)).$$

Løsning:

$$\begin{aligned}\neg(\neg(P \wedge \neg Q) \wedge \neg R) &\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee R \\ &\Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\neg(P \wedge \neg(Q \wedge \neg R)) &\Leftrightarrow \neg P \vee (Q \wedge \neg R) \\ &\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \wedge \neg R).\end{aligned}$$

Oppgave 6

La P , Q og R være utsagn. Anta at følgende utsagn er sant:

$$(P \vee Q) \Rightarrow ((\neg P) \wedge R).$$

Følger det at P er usant?

2. 24 Novemer

Oppgave 1

La A, B og C være mengder. La $f : A \to B$ og $g : B \to C$ være avbildninger. Vi definerer $h = g \circ f$.

a) Anta at h er surjektiv og at g er injektiv. Vis at f er surjektiv.

b) Anta at h er injektiv og at f er surjektiv. Vis at g er injektiv.

Oppgave 2

La A være en ikke-tom mengde, og la $f : A \to A$ være en avbildning. Vi minner om at den n-te itererte av f for $n \in \mathbb{N}$ betegnes ved f^n og er definert induktivt ved

$$f^0 = \mathrm{id_A},$$

og

$$f^{n+1} = f \circ f^n.$$

a) Vis at hvis f er injektiv, så er f^n injektiv for alle n.

b) Vis at hvis det fins $n \geq 1$ slik at f^n er injektiv, så er f injektiv.

Oppgave 3

Vis at dersom A er en tellbar (uendelig!) mengde og dersom $x \in A$ så fins en bijeksjon $A \to A \setminus \{x\}$.

Oppgave 4

a) Vis at

$$(\bigcap_{i \in I} A_i) \cup (\bigcap_{j \in J} B_j) \subseteq \bigcap_{(i,j) \in I \times J} A_i \cup B_j.$$

b) Vis at vi også har

$$\bigcap_{(i,j)\in I\times J} A_i \cup B_j \subseteq (\bigcap_{i\in I} A_i) \cup (\bigcap_{j\in J} B_j).$$

Oppgave 5

La A, B være mengder. Anta at $f : A \to B$ er en avbilding slik at for alle $C \subseteq A$ så har vi $f[A \setminus C] = B \setminus f[C]$. Vis at f er en bijeksjon.

Oppgave 6

Anta at $g : A \to A$ er en bijeksjon og at $f : A \to A$ er en avbildning slik at $f \circ g \circ f = g$. Vis at f er en bijeksjon.

3. 29 November

Oppgave 1

La A og B være mengder, og la $f : A \to B$ være en avbilding. Vi antar at vi har en ekvivalensrelasjon $\sim$ på B. Vi definerer en relasjon $\approx$ på A ved å kreve at for $x, y \in A$ så har vi

$$x \approx y \Leftrightarrow f(x) \sim f(y).$$

Vis at $\approx$ er en ekvivalensrelasjon.

Oppgave 2

a) Vi lar $\mathbb{Z}$ være utstyrt med sin vanlige ordensrelasjon. Vis ved induksjon på kardinalitet at hver ikke-tomme endelige delmengde av $\mathbb{Z}$ har et største element.

b) Vi utstyrer $\mathbb{Z}$ med operasjonen som avbilder $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ på det største elementet i $\{x, y\}$. Sjekk at operasjonen er assossiativ. Vis at den ikke har noe nøytralt element.

Oppgave 3

Vi utstyrer $\mathbb{N}$ med sin vanlige addisjon, og følger konvensjonen at $0 \in \mathbb{N}$. La $* : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ være en operasjon som distrinuerer over addisjon på begge sider, i den forstand at

$$a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$$
$$(a + b) * c = (a * c) + (b * c)$$

for alle $a, b, c \in \mathbb{N}$.

a) Vis at for alle $m \in \mathbb{N}$ så har vi at $m * 0 = 0 * m = 0$.

b) Vis ved induksjon at for alle $m, n \in \mathbb{N}$ så har vi

$$m * n = mn(1 * 1).$$

c) Vis at dersom $*$ har et nøytralt element så må $1 * 1 = 1$.

Oppgave 4

La $(A, \leq)$ være en ordnet mengde.

a) Vis at hvis det fins en strengt avtagende følge i A så er $(A, \leq)$ ikke velordnet.

b) Vis at hvis $(A, \leq)$ er totalt ordnet men ikke velordnet så fins det en strangt avtagende følge i A.

Oppgave 5

La $(A, +, \cdot)$ være en kommutativ ring. Et ideal $I \subset A$ er definert som en ikke-tom delmengde I slik at

$$\forall x, y \in I, x + y \in I \text{ and } \forall x \in A, \forall y \in I, xy \in I.$$

a) Vis at for $x \in I$ så har vi $-x \in I$.

b) Vis at dersom $\sim$ er en ekvivalensrelasjon på A som er kompatibel med ringstrukturen, så er $[0]$ et ideal i A.

c) Vis at dersom I er et ideal i A så er relasjonen $\sim$ definert ved $x \sim y$ dersom $y - x \in I$ en ekvivalensrelasjon på A. Vis at den er kompatibel med ringstrukturen.

d) Vis at for ethvert ideal $I \subset \mathbb{Z}$ så fins en og bare en $n \in \mathbb{N}$ slik at $I = n\mathbb{Z}$.

1 DESEMBER

Oppgave 1

Finn alle løsninger $(k, l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ til likningen

$$9000k + 1575l = 225.$$

Hvor mange løsninger fins til ligningen $\overline{1575}\overline{x} = \overline{225}$ i $\mathbb{Z}_{9000}$?

Oppgave 2

Finn alle løsninger til ligningen

$$\overline{105}\overline{x} = \overline{12},$$

i $\mathbb{Z}_{99}$.

Oppgave 3

a) La p være et primtall. Anta at vi har naturlige tall q og r slik at $pq^2 = r^2$. Vis at da deler p både r og q. Bruke dette til å vise at $q = 0$.

b) La p være et primtall. Anta at vi har naturlige tall m, q og r slik at $pmq^2 = r^2$, og m er innbyrdes primisk med p. Vis at $q = 0$.

La $n > 1$ være et naturlig tall. Anta at $nq^2 = r^2$ for naturlige tall q, r med $q > 0$. Vi skriver primtallsfaktoriseringen til n som

$$n = p_0^{k_0} p_1^{k_1} \cdots p_l^{k_l}$$

med $l \geq 1$, og $p_0 < p_1 \cdots < p_l$. Vis, ved hjelp av forrige oppgave, at hver k_i er et partall, og konkluder med at det fins et naturlig tall s slik at $s^2 = n$.

Oppgave 4

La $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ være den strengt voksennde følgen av primtall.

Vis at for $n \in \mathbb{N}$ så har vi at

$$p_{n+1} \leq 1 + \Pi_{k=0}^{n} p_k.$$

Vis at for $n \in \mathbb{N}$ så har vi at

$$p_n \leq 2^{(2^n)}.$$

Oppgave

Oppgave

Oppgave

References

E. F. Wold: Department of Mathematics, University of Oslo, PO-BOX 1053 Blindern, 0316 Oslo, Norway.