

MAT1140

Obligatorisk oppgave 1 av 2

Innleveringsfrist

Torsdag 03. OKTOBER 2024, klokken 14:30 i Canvas (canvas.uio.no).

Instruksjoner

Merk at man har **ett forsøk** på å få oppgaven godkjent. Dette betyr at det ikke lenger gis andregangsforsøk.

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av $\text{\LaTeX}$). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og oblignummer.

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Husk å inkludere alle relevante plott og figurer. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

I oppgaver der du blir bedt om å programmere må du legge ved programkoden og levere den sammen med resten av besvarelsen. Det er viktig at programkoden du leverer inneholder et kjøreeksempel, slik at det er lett å se hvilket resultat programmet gir.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) senest samme dag som innleveringsfristen.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

LYKKE TIL!

Oblig'en består av 14 spørsmål som alle teller 10 poeng. Kravet for å bestå er å få minst 60 av 140 mulige poeng. I bedømmingen vil det bli lagt vekt på klarheten i bevisene. Oppgavene krever først og fremst å ha god kontroll på vokabularet. Når det er på plass kan svaret på hver oppgave bli relativt kort. I oppgave 2 er noen spørsmål formulert åpent selv om presise svar finnes. Oppgave 3 er enda mer åpen og er et eksperiment for å se hvordan slike oppgaver blir mottatt.

Oppgave 1. La U være en mengde og la A og B være to delmengder av U . Vi ser på avbildningen:

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) & \rightarrow \mathcal{P}(U) \\ (X, Y) & \mapsto X \cup Y \end{cases} \quad (1)$$

- (i) Vis at hvis $A \cup B = U$ så er Φ surjektiv.
- (ii) Vis at hvis Φ er surjektiv så er $A \cup B = U$. Man kan betrakte den kontrapositive implikasjonen.
- (iii) Vis at hvis $A \cap B = \emptyset$ så er Φ injektiv.
- (iv) Vis at hvis Φ er injektiv så er $A \cap B = \emptyset$.

Vi ser på avbildningen:

$$\Psi : \begin{cases} \mathcal{P}(U) & \rightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ Z & \mapsto (Z \cap A, Z \cap B) \end{cases} \quad (2)$$

- (v) Vis at hvis $A \cap B = \emptyset$ så er $\Psi \circ \Phi$ identiteten på $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$.
- (vi) Hva med motsatt implikasjon i forrige spørsmål?
- (vii) Vis at hvis $A \cup B = U$ så er $\Phi \circ \Psi$ identiteten på $\mathcal{P}(U)$.
- (viii) Hva med motsatt implikasjon i forrige spørsmål?

Oppgave 2. ¹

La U være en mengde og la $(A_i)_{i \in I}$ være en familie delmengder av U . For hver $J \subseteq I$ definerer vi:

$$B_J = \left(\bigcap_{i \in J} A_i \right) \cap \left(\bigcap_{i \in I \setminus J} U \setminus A_i \right). \quad (3)$$

Man anser her at snittet av en familie mengder indeksert av den tomme mengden er U .

¹Takk til Simon Foldvik for denne oppgaven.

Lag gjerne en tegning (Venn diagram) når I har to eller tre elementer og illustrer hvor de forskjellige B_J befinner seg.

(i) Gi enkle uttrykk for $B_\emptyset$ og B_I . Hvordan beskrive B_J når $J \subseteq I$ er en ettpunktsmengde/singleton?

(ii) Vis at hvis $J, J' \in \mathcal{P}(I)$ og $J \neq J'$ har vi $B_J \cap B_{J'} = \emptyset$.

(iii) Vis at:

$$\bigcup_{J \in \mathcal{P}(I)} B_J = U. \quad (4)$$

(iv) Hvilke indekser $J \in \mathcal{P}(I)$ må brukes i forrige spørsmål for at unionen skal bli akkurat $\cup_{i \in I} A_i$?

(v) La $i \in I$ være gitt. Hvilke indekser må brukes for at unionen skal bli A_i ?

Oppgave 3. Les deg opp (hvor som helst) på begrepene “Conjunctive normal form” og “Disjunctive normal form” og skriv en kort tekst (ca en halv side) som forklarer (la oss si for en medstudent på dette emnet) hva dette går ut på. Det er greit å bare behandle det ene av de to.