

MAT1140

Obligatorisk oppgave 2 av 2

Innleveringsfrist

Torsdag 31. OKTOBER 2024, klokken 14:30 i Canvas (canvas.uio.no).

Instruksjoner

Merk at man har **ett forsøk** på å få oppgaven godkjent. Dette betyr at det ikke lenger gis andregangsforsøk.

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av $\text{\LaTeX}$). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og obliqnummer.

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Husk å inkludere alle relevante plott og figurer. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

I oppgaver der du blir bedt om å programmere må du legge ved programkoden og levere den sammen med resten av besvarelsen. Det er viktig at programkoden du leverer inneholder et kjøreeksempel, slik at det er lett å se hvilket resultat programmet gir.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) senest samme dag som innleveringsfristen.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

LYKKE TIL!

Oblig'en består av 7 spørsmål som alle teller 10 poeng. Kravet for å bestå er å få minst 45 av 70 mulige poeng. I bedømmingen vil det bli lagt vekt på klarheten i bevisene. I noen av oppgavene blir det vist til steder i læreboken, med stoff å lese seg opp på.

Oppgave 1. La $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ være en følge av ikke-tomme mengder. Vi antar at for hver $n \in \mathbb{N}$ har vi en avbildning $f_n : A_n \rightarrow A_{n+1}$. Vi gjør også et valg av en $x \in A_0$. Vi definerer¹ :

$$U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n. \quad (1)$$

I denne oppgaven skal vi vise at det finnes en unik følge $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i U slik at $u_0 = x$ og $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f_n(u_n)$. Dette er en generalisering av Teorem 3.1.3 i læreboken.

(i) Vis at det finnes høyst én følge u med disse egenskapene.

Ved induksjon.

(ii) Vi ønsker nå å vise eksistens av en slik følge u . Vi definerer:

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\} \times A_n. \quad (2)$$

Vi definerer $g : B \rightarrow B$ ved at for $n \in \mathbb{N}$ og $y \in A_n$ så $g(n, y) = (n+1, f_n(y))$. Begrunn at g er veldefinert. Bruk Teorem 3.1.3 til å vise eksistens av u .

Mengdene $\{n\} \times A_n$ er to og to disjunkte. Det gir at g er veldefinert. Vi kan finne en følge v i B slik at $v_0 = (0, x)$ og $v_{n+1} = g(v_n)$. Man sjekker ved induksjon at første komponent til v_n er n og at andre komponent ligger i A_n . Det vil si at $v_n = (n, u_n)$ for en gitt $u_n \in A_n$. Deretter sjekker man at følgen (u_n) man har oppnådd på den måten tilfredsstiller at $u_0 = x$ og at $u_{n+1} = f(u_n)$.

(iii) Vi utarbeider nå et eksempel. Vi bruker konvensjonen $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}^{[0, n-1]}$, hvor $[0, n-1] = \{k \in \mathbb{N} : 0 \leq k \leq n-1\}$. Vi presiserer at $\mathbb{Z}^0$ har ett element, nemlig avbildningen $\emptyset \rightarrow \mathbb{Z}$ med tom graf. Vi kaller denne avbildningen e . Vi lar A_n være mengden av avbildninger fra $\mathbb{Z}^n$ til $\mathbb{Z}$. Vi lar

¹Vi tillater oss å gjøre det. Vil man begrunne det aksiomatisk, trenger man aksiomer listet opp side 133 i læreboka.

$x \in A_0$ være avbildningen som sender e til 0. For $v \in A_n$ lar vi $f_n(v) \in A_{n+1}$ være definert ved at:

$$f_n(v) : \begin{cases} \mathbb{Z}^{n+1} & \rightarrow \mathbb{Z} \\ t & \mapsto v(t|_{[0, n-1]}) + t_n \end{cases} . \quad (3)$$

La nå (u_n) være følgen i U , med $u_n \in A_n$, definert ved at $u_0 = x$ og at $u_{n+1} = f_n(u_n)$.

La (z_n) være en følge i $\mathbb{Z}$. Vi definerer $t[n] = (z_0, \dots, z_{n-1}) \in \mathbb{Z}^n$ og $s_n = u_n(t[n])$.

Sjekk at $s_0 = 0$ og at for alle $n \in \mathbb{N}$ har vi $s_{n+1} = s_n + z_n$. Hva er da tolkningen av s_n ? Hva er en tolkning av u_n ?

Vi har $s_0 = u_0(t[0]) = 0$.

Vi har også $s_{n+1} = u_{n+1}(t[n+1]) = f_n(u_n)(t[n+1]) = u_n(t[n]) + t[n+1]_n = s_n + z_n$.

Dermed blir en tolkning at $s_{n+1} = z_0 + z_1 + \dots + z_n$.

En tolkning av u_n er at det er en operasjon som summerer leddene i n -tupler.

Oppgave 2 (inkludjon-ekskludjonsprinsippet). Når I er en mengde og $k \in \mathbb{N}$ definerer vi:

$$\mathcal{P}_k(I) = \{J \in \mathcal{P}(I) : |J| = k\}. \quad (4)$$

I denne oppgaven tillater vi oss å summere familier av hele tall, indeksert av endelige mengder. Dersom I er en endelig mengde med kardinalitet n , og vi velger en bijeksjon $\sigma : \mathbb{N}_n \rightarrow I$ setter vi, for hver familie $(z_i)_{i \in I}$ av hele tall:

$$\sum_{i \in I} z_i = \sum_{k=0}^{n-1} z_{\sigma(k)}. \quad (5)$$

Vi tillater oss å bruke intuitive regneregler for summetegn listet opp rundt side 243 i læreboka.

Vi vil vise følgende. For hver $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, for hver endelige mengde I med kardinalitet n , og for hver familie $(A_i)_{i \in I}$ av endelige mengder har vi:

$$|\bigcup_{i \in I} A_i| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{J \in \mathcal{P}_k(I)} |A_J|. \quad (6)$$

Her har vi brukt definisjonen:

$$A_J = \bigcap_{j \in J} A_j. \quad (7)$$

I praksis kan man begrense seg til å se på familier I av typen $I = \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

(i) Utarbeid tilfellene $n = 1$ og $n = 2$.

For $n = 1$ sier likheten bare at med $I = \{i\}$ har vi $|A_i| = |A_i|$.
 For $n = 2$ sier likheten at med $I = \{i, j\}$ har vi $|A_i \cup A_j| = |A_i| + |A_j| - |A_i \cap A_j|$. Denne identiteten er pensum.

(ii) Vis at utsagnet er sant også for $n = 3$. I beviset kan man bruke tilfellet $n = 2$.

Vi utleder først:

$$\begin{aligned} |A_0 \cup A_1 \cup A_2| &= |A_0 \cup A_1| + |A_2| - |(A_0 \cup A_1) \cap A_2|, \\ &= |A_0| + |A_1| - |A_0 \cap A_1| + |A_2| - \\ &\quad |(A_0 \cap A_2) \cup (A_0 \cap A_1)|, \\ &= |A_0| + |A_1| + |A_2| - |A_0 \cap A_1| - |(A_0 \cap A_2)| - \\ &\quad |(A_0 \cap A_1)| + |A_0 \cap A_1 \cap A_2|. \end{aligned} \quad (8)$$

Her kjenner vi igjen tilfellet $n = 3$.

(iii) Vis ved induksjon at utsagnet er sant for hver $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i spesialtilfellet hvor vi antar at mengdene A_i er to og to disjunkte (dvs. at når $i \neq j$ så $A_i \cap A_j = \emptyset$).

I dette tilfellet er $A_J = \emptyset$ så fort $|J| \geq 2$. Identiteten å bevise er at:

$$|A_0 \cup \dots \cup A_{n-1}| = \sum_{i=0}^{n-1} |A_i|. \quad (9)$$

Induksjonen er da uproblematisk.

(iv) Gi et induksjonsbevis for det generelle resultatet. Gitt en familie $(A_i)_{i \in I}$ hvor $I = \llbracket 0, n \rrbracket$, kan man lage en familie (A'_i) indeksert av $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ slik at $A'_i = A_i$ for $i < n-2$ og $A'_{n-1} = A_{n-1} \cup A_n$. Deretter kan man bruke induksjonshypotesen på familien (A'_i) (som har ett ledd mindre).

Grunntrinn. Allerede vist.

Induksjonstrinn. Vi lar $I' = \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ og $I'' = \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Vi skriver induksjonshypotensen for (A'_i) :

$$|\cup_{i \in I} A_i| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{J' \in \mathcal{P}_k(I')} |A'_{J'}| \quad (10)$$

For $J' \in \mathcal{P}_k(I')$ skiller vi mellom to tilfeller. Hvis $n-1 \notin J'$ så $A'_{J'} = A_{J''}$ med $J'' = J' \in \mathcal{P}_k(I'')$. Vi kaller dette ledd av type I.

Hvis $n-1 \in J'$ skriver vi $J' = J'' \cup \{n-1\}$ med $J'' \in \mathcal{P}_{k-1}(I'')$. Da har vi:

$$A'_{J'} = A_{J''} \cap (A_{n-1} \cup A_n), \quad (11)$$

$$= (A_{J''} \cap A_{n-1}) \cup (A_{J''} \cap A_n). \quad (12)$$

Dermed får vi:

$$|A'_{J'}| = |A_{J''} \cap A_{n-1}| + |A_{J''} \cap A_n| - |A_{J''} \cap A_{n-1} \cap A_n|. \quad (13)$$

Vi ser at kardinaliteten til $J'' \cup \{n-1\}$ og $J'' \cup \{n\}$ er k . Dette er ledd av type II. Kardinaliteten til $J'' \cup \{n-1\} \cup \{n\}$ er $k+1$ og vi kaller dette ledd av type IV.

På en annen side, når $J \in \mathcal{P}_k(I)$ skriver vi $J = J'' \cup K$ med $J'' = J \cap I''$ og $K \subseteq \{n-1, n\}$.

Når man diskuterer hvorvidt K inneholder $n-1$ og n får man fire muligheter:

- $J'' \in \mathcal{P}_k(I'')$, $K = \emptyset$. Det tilsvarer ledd av type I.
- $J'' \in \mathcal{P}_{k-1}(I'')$, $K = \{n-1\}$ eller $K = \{n\}$. Dette er leddene av type II.
- $J'' \in \mathcal{P}_{k-2}(I'')$, $K = \{n-1, n\}$. Dette er ledd av type IV, men merk forskjellen i fortegn i forhold til over, fordi kardinaliteten til J'' er $k-2$ ikke $k-1$...

[noe uferdig]