

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT1140 — Strukturer og argumenter

Eksamensdag: Mandag 25. november 2024

Tid for eksamen: 15:00 – 19:00

Oppgavesettet er på 6 sider.

Vedlegg: Ingen

Tillatte hjelpemidler: Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

For hvert spørsmål kan du bruke resultater fra tidligere spørsmål, selv om du ikke har besvart dem.

Oppgavene er ikke nødvendigvis ordnet etter vanskelighetsgrad.

Det vil bli lagt spesiell vekt på argumentasjonen i besvarelsene.

Terminologi og notasjon:

- Vi anser at 0 er et naturlig tall, slik at $0 \in \mathbb{N}$.
- Anta at A og B er mengder og at $f : A \rightarrow B$ er en avbildning.

Når $E \subseteq A$, er direktebildet til E gjennom f , mengden definert ved:

$$f[E] = \{y \in B : \exists x \in E \quad y = f(x)\}. \quad (0.1)$$

Når $F \subseteq B$ er inversbildet til F gjennom f , mengden definert ved:

$$f^{-1}[F] = \{x \in A : f(x) \in F\}. \quad (0.2)$$

For eksempel har vi for $y \in B$:

$$f^{-1}[\{y\}] = \{x \in A : f(x) = y\}. \quad (0.3)$$

Oppgave 1 (vekt 10 poeng)

La P, Q, R og S være utsagnsvariable (utsagn med ukjent sannhetsverdi).

Vi antar at:

$$\left((P \vee Q) \implies (R \wedge S) \right) \wedge \left((R \vee S) \implies (P \wedge Q) \right). \quad (1.1)$$

(Fortsettes på side 2.)

Vis at da har vi:

$$P \iff Q. \quad (1.2)$$

Hvis P så $P \vee Q$ og da $R \wedge S$ som gir $R \vee S$ som i sin tur gir $P \wedge Q$ og det gir Q .
På samme måte får vi at Q impliserer P .

Oppgave 2 (vekt 20 poeng)

a (vekt 10 poeng)

Vis at for alle mengder A , B og C har vi:

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup C. \quad (2.1)$$

Vi har (distributivitet):

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \quad (2.2)$$

Siden $A \cap C \subseteq C$ får vi:

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq (A \cap B) \cup C. \quad (2.3)$$

b (vekt 10 poeng)

Vis at for alle mengder A , B og C har vi:

$$\left((A \cap B) \cup C \subseteq A \cap (B \cup C) \right) \iff C \subseteq A. \quad (2.4)$$

- [5] Anta at $(A \cap B) \cup C \subseteq A \cap (B \cup C)$. Da er C delmengde av venstre ledd mens høyre ledd er delmengde av A . Det gir $C \subseteq A$ ved transitivitet.
- [5] Anta at $C \subseteq A$. Da har vi $A \cap C = C$. Da har vi:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad (2.5)$$

$$= A \cap (B \cup C). \quad (2.6)$$

Spesielt får vi inklusjon.

Oppgave 3 (vekt 20 poeng)

La A , B og C være ikke-tomme mengder og anta at vi har to avbildninger $f : A \rightarrow B$ og $g : A \rightarrow C$. I den settingen definerer vi $h : A \rightarrow B \times C$ ved at for alle $x \in A$:

$$h(x) = (f(x), g(x)) \in B \times C. \quad (3.1)$$

(Fortsettes på side 3.)

a (vekt 10 poeng)

Vis at hvis f eller g er injektiv, så er h injektiv.

Anta for eksempel at f er injektiv. Anta at $x, y \in A$ og at $h(x) = h(y)$. Vi har da $(f(x), g(x)) = (f(y), g(y))$. Det gir $f(x) = f(y)$. Injektivitet til f gir da $x = y$. Vi har vist injektivitet av h .
Når g er injektiv argumenterer man på samme måte.

b (vekt 10 poeng)

Gi et eksempel på mengder A, B, C og avbildninger $f : A \rightarrow B$ og $g : A \rightarrow C$ slik at h er injektiv men hverken f eller g er injektiv. En mulighet er å lete etter et eksempel hvor $A = B \times C$.

- Når $A = B \times C$ kan vi la $f : B \times C \rightarrow B$ være første projeksjon $(x, y) \mapsto x$ mens $g : B \times C \rightarrow C$ er andre projeksjon $(x, y) \mapsto y$. Da er $h : A \rightarrow A$ identiteten, som er injektiv.
Hvis både B og C har minst to elementer er hverken f eller g injektiv.
- En annen type eksempel består av:

$$f : \begin{cases} \mathbb{Z} & \rightarrow \mathbb{Z}, \\ x & \mapsto x^2. \end{cases} \quad (3.2)$$

og:

$$g : \begin{cases} \mathbb{Z} & \rightarrow \mathbb{Z}, \\ x & \mapsto \begin{cases} 1 & \text{hvis } x > 0, \\ 0 & \text{hvis } x = 0, \\ -1 & \text{hvis } x < 0. \end{cases} \end{cases} \quad (3.3)$$

Oppgave 4 (vekt 10 poeng)

La A og B være mengder. Vi antar at vi har avbildninger $f : A \rightarrow B$ og $g : B \rightarrow A$ slik at $f \circ g = \text{id}_B$. Vi definerer $h : A \rightarrow A$ som avbildningen $h = g \circ f$. Vis ved induksjon at for alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ har vi $h^n = h$.

(Fortsettes på side 4.)

- [2] Grunntrinn. Vi har $h^1 = h$.
- [8] Induksjonstrinn. La $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ og anta at $h^n = h$. Vi har da:

$$h^{n+1} = h \circ h^n, \quad (4.1)$$

$$= h \circ h, \quad (4.2)$$

$$= (g \circ f) \circ (g \circ f), \quad (4.3)$$

$$= g \circ (f \circ g) \circ f, \quad (4.4)$$

$$= g \circ \text{id}_B \circ f, \quad (4.5)$$

$$= g \circ f, \quad (4.6)$$

$$= h. \quad (4.7)$$

Oppgave 5 (vekt 10 poeng)

La M og M' være monoider. Operasjonen på M skrives $\star$ og nøytralt element skrives e . Operasjonen på M' skrives $\star'$ og nøytralt element skrives e' .

Vi antar at $f : M \rightarrow M'$ er en monoide-morfi i den forstand at $f(e) = e'$ og for alle $x, y \in M$ har vi $f(x \star y) = f(x) \star' f(y)$.

Vi definerer $I = f^{-1}[\{e'\}]$. Vis følgende:

- $e \in I$.
- Hvis $x, y \in I$ så $x \star y \in I$.
- Hvis $x \in I$ og $y \in M$ og $x \star y \in I$ så $y \in I$.
- Hvis $x, y \in M$ og $z \in I$, hvis $x \star y \in I$ så $x \star z \star y \in I$.

- [2] Siden $f(e) = e'$ har vi $e \in I$.
- [2] Når $x, y \in I$ har vi $f(x \star y) = f(x) \star' f(y) = e' \star' e' = e'$. Dermed $x \star y \in I$.
- [3] Når $x \in I$ og $y \in M$ og $x \star y \in I$, får vi $e' = f(x \star y) = f(x) \star' f(y) = e' \star' f(y) = f(y)$. Dermed $y \in I$.
- [3] Når $x, y \in M$ og $z \in I$, og $x \star y \in I$, får vi $f(x \star z \star y) = f(x) \star' f(z) \star' f(y) = f(x) \star' e' \star' f(y) = f(x) \star' f(y) = f(x \star y) = e'$. Dermed $x \star z \star y \in I$.

Oppgave 6 (vekt 30 poeng)

La A og B være mengder. Vi lar $\mathcal{F}$ være mengden av alle avbildninger fra A til B . Vi lar $\mathcal{S}$ være mengden av alle bijeksjoner fra A til A .

Vi definerer en relasjon $\sim$ på $\mathcal{F}$ ved at for alle $f, g \in \mathcal{F}$:

$$f \sim g \iff (\exists u \in \mathcal{S} \quad f = g \circ u). \quad (6.1)$$

a (vekt 10 poeng)

Vis at $\sim$ er en ekvivalensrelasjon.

(Fortsettes på side 5.)

- [3] Refleksivitet. La $f \in \mathcal{F}$. Man kan bruke $u = \text{id}_A \in \mathcal{S}$ og bemerke at da har vi $f = f \circ u$, som gir $f \sim f$.
- [4] Transitivitet. La $f, g, h \in \mathcal{F}$. Anta at $f \sim g$ og $g \sim h$. Velg $u, v \in \mathcal{S}$ slik at:

$$f = g \circ u, \quad (6.2)$$

$$g = h \circ v. \quad (6.3)$$

Da har vi $f = h \circ v \circ u$. Siden $v \circ u \in \mathcal{S}$ får vi $f \sim h$.

- [3] Symmetri. La $f, g \in \mathcal{F}$ og anta at $f \sim g$. Velg $u \in \mathcal{S}$ slik at $f = g \circ u$. Da har vi $g = f \circ u^{-1}$, hvor $u^{-1} \in \mathcal{S}$. Det gir $g \sim f$.

b (vekt 10 poeng)

Vi antar at A er endelig. Vi antar også at $f, g \in \mathcal{F}$ er slik at $f \sim g$. Vis at for alle $y \in B$ har mengdene $f^{-1}[\{y\}]$ og $g^{-1}[\{y\}]$ samme kardinalitet.

Velg $u \in \mathcal{S}$ slik at $f = g \circ u$.

La $y \in B$. Vi definerer $F = f^{-1}[\{y\}]$ og $G = g^{-1}[\{y\}]$.

Nå har vi at hvis $x \in F$ så vil det si $f(x) = y$. Da får vi $g(u(x)) = y$ som gir $u(x) \in G$.

Likeledes, når $x \in G$ får vi $u^{-1}(x) \in F$.

Dette gir at u induserer en bijeksjon fra F til G .

Derfor har F og G samme kardinalitet.

c (vekt 10 poeng)

Anta nå at $f, g \in \mathcal{F}$ er slik at for alle $y \in B$ har mengdene $f^{-1}[\{y\}]$ og $g^{-1}[\{y\}]$ samme kardinalitet.

For $y \in B$ definerer vi $A_y = f^{-1}[\{y\}]$. Sjekk at for $y, y' \in B$, når $y \neq y'$ har vi $A_y \cap A_{y'} = \emptyset$. Sjekk også at:

$$\bigcup_{y \in B} A_y = A. \quad (6.4)$$

Konkluder med at at $f \sim g$.

- [3] La $y \neq y'$. Hvis $x \in A_y \cap A_{y'}$ får vi $f(x) = y$ og $f(x) = y'$ som er umulig. For hver $x \in A$ har vi $x \in A_{f(x)}$. Dermed blir unionen A .
- [7] For hver $y \in B$ lar vi u_y være en bijeksjon fra $f^{-1}[\{y\}]$ til $g^{-1}[\{y\}]$. Vi definerer $u : A \rightarrow A$ ved delt forskrift. For $x \in A$ har vi $x \in A_y$ med $y = f(x)$. Da definerer vi:

$$u(x) = u_y(x). \quad (6.5)$$

Vi har da $u(x) \in g^{-1}[\{f(x)\}]$ altså $g(u(x)) = f(x)$. Dette uttrykkes som at $g \circ u = f$.

Vi bemerker at mengdene $g^{-1}[\{y\}]$ også er to og to disjunkte og har A som union. Siden de har A som union, og hver u_y er surjektiv, blir u surjektiv. At de er to og to disjunkte gir, sammen med injektivitet av de individuelle u_y , at u er injektiv. Dermed $u \in \mathcal{S}$.

SLUTT