

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT1140 — Strukturer og argumenter

Eksamensdag: Fredag 8. desember 2017

Tid for eksamen: 14:30 – 18:30

Oppgavesettet er på 5 sider.

Vedlegg: Ingen

Tillatte hjelpemidler: Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

For hvert spørsmål kan du bruke resultater fra tidligere spørsmål, selv om du ikke har besvart dem.

Terminologi: Vi anser at 0 er et naturlig tall, slik at $0 \in \mathbb{N}$.

Oppgave 1 (vekt 10 poeng)

For hver endelige mengde A lar vi $|A| \in \mathbb{N}$ være kardinaliteten til A (også omtalt som "antall elementer" i A).

Anta at A , B og C er endelige mengder. Vis at $A \cup B \cup C$ er endelig og at:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|. \quad (1.1)$$

Vi bruker to ganger at når A og B er endelige, så er $A \cup B$ endelig med:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \quad (1.2)$$

Vi får at $A \cup B$ er endelig og dermed er $A \cup B \cup C$ endelig og vi kan skrive:

$$|A \cup B \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C|, \quad (1.3)$$

$$= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)|, \quad (1.4)$$

$$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |(A \cap C) \cap (B \cap C)|, \quad (1.5)$$

$$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |C \cap A| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|. \quad (1.6)$$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2 (vekt 20 poeng)

La A være en ikke-tom mengde, og la $f : A \rightarrow A$ være en avbildning. Vi minner om at den n -te itererte av f , med hensyn på komposisjon, er en avbildning $A \rightarrow A$ som kan skrives f^n og defineres for $n \in \mathbb{N}$ ved:

$$f^0 = \text{id}_A, \quad (2.1)$$

$$f^{n+1} = f \circ f^n, \text{ for hver } n \in \mathbb{N}. \quad (2.2)$$

a (vekt 10 poeng)

Vis at hvis f er surjektiv, så er f^n surjektiv for hver $n \in \mathbb{N}$.

Ved induksjon på n . For hver $n \in \mathbb{N}$ lar vi $P(n)$ være utsagnet: f^n er surjektiv.

– $P(0)$ er sann, siden id_A er surjektiv.

– La $n \in \mathbb{N}$ og anta at $P(n)$ er sann. Vi har at $f^{n+1} = f \circ f^n$ er surjektiv, som komposisjon av to surjektive avbildninger. Dermed er $P(n+1)$ sann.

Dette fullfører induksjonsbeviset.

b (vekt 10 poeng)

Vis at hvis det finnes $n \in \mathbb{N}$, med $n \geq 1$, slik at f^n er surjektiv, så er f surjektiv.

Anta at $n \in \mathbb{N}$ er slik at $n \geq 1$ og at f^n er surjektiv. Vi har $f^n = f \circ f^{n-1}$. Gitt $y \in A$ kan vi finne $x \in A$ slik at $f^n(x) = y$. Med $z = f^{n-1}(x) \in A$ får vi da $f(z) = y$. Dette viser at f er surjektiv.

PS: prinsippet er at når f og g er komponerbare avbildninger og $f \circ g$ er surjektiv, så må f være surjektiv.

Oppgave 3 (vekt 10 poeng)

Vi minner om at en mengde A sies å være tellbar dersom det finnes en bijeksjon $\mathbb{N} \rightarrow A$.

Vis at hvis A er en tellbar mengde og $x \in A$ så finnes det en bijeksjon $A \rightarrow A \setminus \{x\}$.

La A være tellbar og anta $x \in A$.

Velg en bijeksjon $f : \mathbb{N} \rightarrow A$. Velg $n \in \mathbb{N}$ slik at $f(n) = x$.

Definer $g : \mathbb{N} \rightarrow A \setminus \{x\}$ ved:

$$g : \begin{cases} \mathbb{N} & \rightarrow & A \setminus \{x\}, \\ k & \mapsto & \begin{cases} f(k) & \text{hvis } k < n, \\ f(k+1) & \text{hvis } k \geq n. \end{cases} \end{cases} \quad (3.1)$$

Man ser at g er både injektiv og surjektiv, dermed bijektiv.

Dermed er $g \circ f^{-1} : A \rightarrow A \setminus \{x\}$ en bijeksjon.

PS: man kan også argumentere for at $A \setminus \{x\}$ er tellbar, uten å innføre en eksplisitt definert bijeksjon g .

Oppgave 4 (vekt 20 poeng)

La A være en mengde utstyrt med en ordensrelasjon som vi skriver $\leq$. Vi minner om at $(A, \leq)$ sies å være velordnet dersom hver ikke-tomme delmengde av A har et minste element.

a (vekt 10 poeng)

Vis at hvis det finnes en strengt avtagende følge i A så er $(A, \leq)$ ikke velordnet.

Anta at $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ er en strengt avtagende følge i A . Vi definerer:

$$B = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}. \quad (4.1)$$

Da er B en ikke-tom delmengde av A og vi sjekker at B ikke har noe minste element, ved motsigelse: Hvis x er minste element i B kan vi skrive $x = u_n$ for en $n \in \mathbb{N}$. Da har vi $u_{n+1} \in B$ og $u_{n+1} < x$, som er umulig.

b (vekt 10 poeng)

Vis at hvis $(A, \leq)$ er totalt ordnet men ikke velordnet finnes det en strengt avtagende følge i A .

Anta at $(A, \leq)$ er totalt ordnet men ikke velordnet. La B være en ikke-tom delmengde av A som ikke har noe minste element. Vi lager en strengt avtagende følge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i B ved induksjon.

– Siden B ikke er tom kan vi velge $u_0 \in B$.

– Anta at $n \in \mathbb{N}$ og at vi har definert $u_0, \dots, u_n \in B$ slik at $u_0 > \dots > u_n$. Siden u_n ikke kan være minste element i B finnes det $x \in B$ slik at $\neg(u_n \leq x)$. Siden A er totalt ordnet får vi da $x < u_n$. Vi definerer da $u_{n+1} = x$.

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 5 (vekt 40 poeng)

La A være en mengde utstyrt med to operasjoner kalt addisjon og multiplikasjon, slik at vi har å gjøre med en ring. Vi antar at multiplikasjonen er kommutativ. Nøytralt element for addisjon skrives 0 og nøytralt element for multiplikasjon skrives 1.

Vi minner om at en ekvivalensrelasjon $\sim$ på A sies å være kompatibel med ringstrukturen dersom vi har:

$$\forall x, x', y, y' \in A \quad ((x \sim x') \wedge (y \sim y')) \implies ((x + y) \sim (x' + y')), \quad (5.1)$$

og

$$\forall x, x', y, y' \in A \quad ((x \sim x') \wedge (y \sim y')) \implies ((xy) \sim (x'y')). \quad (5.2)$$

Et *ideal* i A er definert som en ikke-tom delmengde I av A slik at:

$$\forall x, y \in I \quad x + y \in I, \quad (5.3)$$

og

$$\forall x \in A \quad \forall y \in I \quad xy \in I. \quad (5.4)$$

a (vekt 10 poeng)

Vis at dersom I er et ideal i A så har vi for alle $x \in I$, at $-x \in I$. Vis at da har vi også $0 \in I$.

- [5] For $x \in I$ har vi $-x = -(1x) = (-1)x \in I$ ved andre aksiom.
 [5] Siden I ikke er tom kan vi velge en $x \in I$. Vi har da $0 = x + (-x) \in I$ ved første aksiom.

b (vekt 10 poeng)

Vis at dersom $\sim$ er en ekvivalensrelasjon på A som er kompatibel med ringstrukturen, så er ekvivalensklassen til 0 et ideal i A .

- La I være ekvivalensklassen til 0.
 – [5] Anta $x, y \in I$. Vi har altså $x \sim 0$ og $y \sim 0$. Dermed $x + y \sim 0 + 0 = 0$. Altså $x + y \in I$.
 – [5] Anta $x \in A$ og $y \in I$. Vi har da $x \sim x$ og $y \sim 0$. Dermed $xy \sim x0 = 0$. Altså $xy \in I$.

c (vekt 10 poeng)

Vis at dersom I er et ideal i A så er relasjonen $\sim$ definert ved at $x \sim y$ dersom $y - x \in I$, en ekvivalensrelasjon på A . Vis også at den er kompatibel med ringstrukturen på A .

(Fortsettes på side 5.)

Vi har, for alle $x, y, z \in A$:

- [1] $x \sim x$, siden $0 \in I$.
- [2] hvis $x \sim y$, så $y - x \in I$, så $x - y \in I$ (ved (a)), så $y \sim x$.
- [2] hvis $x \sim y$ og $y \sim z$, får vi $y - x \in I$ og $z - y \in I$. Da har vi har $z - x = (z - y) + (y - x) \in I$, altså $x \sim z$.

Dette viser at $\sim$ er en ekvivalensrelasjon på A .

- [2] Anta at $x \sim x'$ og $y \sim y'$. Da har vi

$$(x' + y') - (x + y) = (x' - x) + (y' - y) \in I. \quad (5.5)$$

Altså $(x + y) \sim (x' + y')$.

- [3] Anta at $x \sim x'$ og $y \sim y'$. Da har vi

$$x'y' - xy = x'(y' - y) + (x' - x)y = x'(y' - y) + y(x' - x) \in I. \quad (5.6)$$

Altså $xy \sim x'y'$.

Dette viser at $\sim$ er kompatibel med addisjon og multiplikasjon.

d (vekt 10 poeng)

Vi ser nå på tilfellet der $A = \mathbb{Z}$, utstyrt med sin vanlige ringstruktur. Vis at for hvert ideal I i $\mathbb{Z}$ finnes det én og bare én $n \in \mathbb{N}$ slik at:

$$I = n\mathbb{Z} = \{nk : k \in \mathbb{Z}\}. \quad (5.7)$$

- [6] Eksistens. La I være et ideal i $\mathbb{Z}$. Hvis $I = \{0\}$ kan vi ta $n = 0$. Hvis $I \neq \{0\}$, bruker vi at I ikke er tom til å velge $x \in I \setminus \{0\}$. Vi har da også $-x \in I$. Siden $x > 0$ eller $-x > 0$ får vi at følgende mengde ikke er tom:

$$J = \{k \in \mathbb{Z} \cap I : k > 0\}. \quad (5.8)$$

La n være minste element i J (her bruker vi velordningsprinsippet på $\mathbb{N}$). Vi viser nå at $I = n\mathbb{Z}$:

* Siden $n \in I$ får vi $n\mathbb{Z} \subseteq I$.

* For $y \in I$ skriver vi den Euklidske divisjonen av y med n : $y = qn + r$ med $q \in \mathbb{Z}$ og $r \in [0, n - 1]$. Da har vi $r = y - qn \in I$. Da følger det at $r = 0$ (hvis ikke får vi $r \in J$ og $r < n$, som er umulig). Dette viser at $I \subseteq n\mathbb{Z}$.

- [4] Entydighet. La $n, m \in \mathbb{N}$ og anta at $n\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$. Da har vi at n deler m og m deler n , dermed $m = \pm n$. Siden $m, n \geq 0$ får vi $m = n$. PS: flere entydighetsargumenter kan gis.

SLUTT