

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT1140 — Strukturer og argumenter

Eksamensdag: Fredag 13. desember 2019

Tid for eksamen: 14:30 – 18:30

Oppgavesettet er på 3 sider.

Vedlegg: Ingen

Tillatte hjelpemidler: Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

For hvert spørsmål kan du bruke resultater fra tidligere spørsmål, selv om du ikke har besvart dem.

Det vil bli lagt spesiell vekt på argumentasjonen i besvarelsene.

Terminologi og notasjon:

- Vi anser at 0 er et naturlig tall, slik at $0 \in \mathbb{N}$. Vi skriver $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
- Potensmengden til en gitt mengde A skrives $\mathcal{P}(A)$.
- En ordensrelasjon på en mengde A er en relasjon som er refleksiv, transitiv og antisymmetrisk.

Oppgave 1 (vekt 10 poeng)

La P , Q og R være utsagn. Sjekk om følgende utsagn er en tautologi:

$$((P \implies Q) \implies R) \iff (P \implies (Q \implies R)). \quad (1.1)$$

Oppgave 2 (vekt 10 poeng)

Vi minner om at potensmengden til en gitt mengde A skrives $\mathcal{P}(A)$.

La A og B være mengder. Vis at:

$$A \subseteq B \iff \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B). \quad (2.1)$$

Oppgave 3 (vekt 20 poeng)

a (vekt 10 poeng)

Vi lar $\mathbb{Z}$ være utstyrt med sin vanlige ordensrelasjon. Vis ved induksjon på kardinalitet at hver ikke-tomme endelige delmengde av $\mathbb{Z}$ har et største element.

(Fortsettes på side 2.)

b (vekt 10 poeng)

Vi utstyrer $\mathbb{Z}$ med operasjonen som avbilder $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ til det største elementet i $\{x, y\}$, som vi skriver $\max\{x, y\}$. Sjekk at denne operasjonen er assosiativ. Vis at den ikke har noe nøytralt element.

Oppgave 4 (vekt 10 poeng)

La A være en ikke-tom mengde. Vi minner om at en relasjon på A kan tolkes som en delmengde av $A \times A$. Vi definerer:

$$D = \{(x, x) : x \in A\}. \quad (4.1)$$

La R være en relasjon på A . Sjekk at R er refleksiv hvis og bare hvis $D \subseteq R$.

La $\mathcal{E}$ være mengden av refleksive relasjoner på A . Finn en bijeksjon fra $\mathcal{E}$ til $\mathcal{P}((A \times A) \setminus D)$.

Vi antar at A er endelig og lar n være kardinaliteten til A . Vis at $\mathcal{E}$ har kardinalitet $2^{(n^2-n)}$.

Oppgave 5 (vekt 20 poeng)

a (vekt 10 poeng)

La p være et primtall. Anta at vi har naturlige tall q og r slik at $pq^2 = r^2$. Vis at da deler p både r og q . Bruk det til å vise, for eksempel ved motsigelse, at $q = 0$.

b (vekt 10 poeng)

– La p være et primtall. Anta nå at vi har naturlige tall m, q og r slik at $pmq^2 = r^2$ og m er innbyrdes primisk med p . Vis, som i første deloppgave, at $q = 0$.

– La n være et naturlig tall med $n > 0$. Anta at vi har naturlige tall q og r slik at $nq^2 = r^2$, og $q > 0$. Vi skriver primtallsfaktoriseringen til n som :

$$n = p_0^{k_0} p_1^{k_1} \cdots p_l^{k_l}, \quad (5.1)$$

med $l \geq 0$, primtall $p_0 < p_1 < \cdots < p_l$ og naturlige tall $k_i \geq 1$ for hver i . Vis, ved hjelp av forrige spørsmål, at hver k_i er et partall. Konkluder at det finnes et naturlig tall s slik at $n = s^2$.

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 6 (vekt 30 poeng)

La A være en ikke-tom mengde. Vi minner om at en relasjon på A kan tolkes som en delmengde av $A \times A$.

Vi lar $\mathcal{O}$ være mengden av ordensrelasjoner på A . En relasjon Q på A er altså et element i $\mathcal{O}$ hvis og bare hvis Q er refleksiv, transitiv og antisymmetrisk.

Vi lar $\mathcal{S}$ være mengden av relasjoner R på A som tilfredsstiller:

- R er transitiv.
- R er antirefleksiv, i den forstand at for alle x i A har vi at:

$$\neg(R(x, x)). \quad (6.1)$$

(Kommentar: Det vil være naturlig å tolke elementer i $\mathcal{S}$ som "strenge ordensrelasjoner", men vær oppmerksom på at en "streng ordensrelasjon" da ikke er en ordensrelasjon! For eksempel vil relasjonen på $\mathbb{N}$ som gitt x og y uttrykker at $x < y$, kunne omtales som en streng ordensrelasjon. Relasjonen som uttrykker at $x \leq y$ vil, på sin side, være en ordensrelasjon på $\mathbb{N}$.)

a (vekt 10 poeng)

La $Q \in \mathcal{O}$. Vi definerer da relasjonen $\widehat{Q}$ på A ved at, for alle x og y i A :

$$\widehat{Q}(x, y) \iff (Q(x, y) \wedge (x \neq y)). \quad (6.2)$$

Vis at $\widehat{Q} \in \mathcal{S}$.

b (vekt 10 poeng)

La $R \in \mathcal{S}$. Vi definerer da relasjonen $\widetilde{R}$ på A ved at, for alle x og y i A :

$$\widetilde{R}(x, y) \iff (R(x, y) \vee (x = y)). \quad (6.3)$$

Vis at $\widetilde{R} \in \mathcal{O}$.

c (vekt 10 poeng)

Vi betrakter følgende avbildninger:

- $\Phi : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{S}$, definert ved $\Phi(Q) = \widehat{Q}$, for $Q \in \mathcal{O}$.
- $\Psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{O}$, definert ved $\Psi(R) = \widetilde{R}$, for $R \in \mathcal{S}$.

Vis at Φ og Ψ er inverse av hverandre.

SLUTT