

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT1140 — Strukturer og argumenter

Eksamensdag: Fredag 13. desember 2019

Tid for eksamen: 14:30 – 18:30

Oppgavesettet er på 5 sider.

Vedlegg: Ingen

Tillatte hjelpemidler: Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

For hvert spørsmål kan du bruke resultater fra tidligere spørsmål, selv om du ikke har besvart dem.

Det vil bli lagt spesiell vekt på argumentasjonen i besvarelsene.

Terminologi og notasjon:

- Vi anser at 0 er et naturlig tall, slik at $0 \in \mathbb{N}$. Vi skriver $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
- Potensmengden til en gitt mengde A skrives $\mathcal{P}(A)$.
- En ordensrelasjon på en mengde A er en relasjon som er refleksiv, transitiv og antisymmetrisk.

Oppgave 1 (vekt 10 poeng)

La P , Q og R være utsagn. Sjekk om følgende utsagn er en tautologi:

$$((P \implies Q) \implies R) \iff (P \implies (Q \implies R)). \quad (1.1)$$

Vi har at:

$$((P \implies Q) \implies R) \iff (\neg(\neg P \vee Q) \vee R), \quad (1.2)$$

$$\iff ((P \wedge \neg Q) \vee R). \quad (1.3)$$

Vi har også at:

$$(P \implies (Q \implies R)) \iff (\neg P \vee (\neg Q \vee R)), \quad (1.4)$$

$$\iff ((\neg P \vee \neg Q) \vee R). \quad (1.5)$$

Spesielt hvis $\neg R$, $\neg Q$ og $\neg P$ så er den første usann men den andre sann. Så utsagnet i oppgaven er ikke en tautologi.

[alternativ: ved å skrive opp sannhetstabeller.]

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2 (vekt 10 poeng)

Vi minner om at potensmengden til en gitt mengde A skrives $\mathcal{P}(A)$.

La A og B være mengder. Vis at:

$$A \subseteq B \iff \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B). \quad (2.1)$$

- [5] Anta $A \subseteq B$. For hver $C \in \mathcal{P}(A)$ har vi $C \subseteq A$, dermed $C \subseteq B$ (transitivitet av inklusjon) altså $C \in \mathcal{P}(B)$. Dette viser at $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.
- [5] Anta at $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$. Siden $A \in \mathcal{P}(A)$ får vi $A \in \mathcal{P}(B)$, altså $A \subseteq B$.

Oppgave 3 (vekt 20 poeng)

a (vekt 10 poeng)

Vi lar $\mathbb{Z}$ være utstyrt med sin vanlige ordensrelasjon. Vis ved induksjon på kardinalitet at hver ikke-tomme endelige delmengde av $\mathbb{Z}$ har et største element.

- [2] La A være en delmengde med kardinalitet 1. Da skriver vi $A = \{x\}$ for en $x \in \mathbb{Z}$ og bemerker at x er største element i A .
- [8] La $n \in \mathbb{N}^*$ være gitt og anta at hver delmengde av $\mathbb{Z}$ med kardinalitet n har et største element. La A være en delmengde av $\mathbb{Z}$ med kardinalitet $n + 1$. Velg $x \in A$ og definer $A' = A \setminus \{x\}$. Siden A' har kardinalitet n kan vi velge største element $y \in A'$. Hvis $x \leq y$ er y største element i A . Hvis ikke har vi $y < x$ og da er x største element i A .

b (vekt 10 poeng)

Vi utstyrer $\mathbb{Z}$ med operasjonen som avbilder $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ til det største elementet i $\{x, y\}$, som vi skriver $\max\{x, y\}$. Sjekk at denne operasjonen er assosiativ. Vis at den ikke har noe nøytralt element.

- [5] La x, y, z være elementer i $\mathbb{Z}$. Vi har at $\max\{\max\{x, y\}, z\}$ må være et element i $\{x, y, z\}$ som er større (eller lik) x , y og z . Derfor $\max\{\max\{x, y\}, z\} = \max\{x, y, z\}$. Likeledes har vi at $\max\{x, \max\{y, z\}\} = \max\{x, y, z\}$. Dette gir assosiativitet.
- [5] Hvis $e \in \mathbb{Z}$ er et nøytralt element får vi at for alle $x \in \mathbb{Z}$ $\max\{x, e\} = x$. Spesielt får vi at $\max\{e-1, e\} = e-1$, slik at $e = e-1$ som er umulig.

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 4 (vekt 10 poeng)

La A være en ikke-tom mengde. Vi minner om at en relasjon på A kan tolkes som en delmengde av $A \times A$. Vi definerer:

$$D = \{(x, x) : x \in A\}. \quad (4.1)$$

La R være en relasjon på A . Sjekk at R er refleksiv hvis og bare hvis $D \subseteq R$.

La $\mathcal{E}$ være mengden av refleksive relasjoner på A . Finn en bijeksjon fra $\mathcal{E}$ til $\mathcal{P}((A \times A) \setminus D)$.

Vi antar at A er endelig og lar n være kardinaliteten til A . Vis at $\mathcal{E}$ har kardinalitet $2^{(n^2-n)}$.

- [2] Vi har at $D \subseteq R$ hvis og bare hvis, for alle $x \in A$, $(x, x) \in R$, som uttrykker refleksivitet av R .
- [5] Avbildningen $R \mapsto R \setminus D$ er en bijeksjon fra $\mathcal{E}$ til $\mathcal{P}((A \times A) \setminus D)$, med invers $Q \mapsto Q \cup D$.
- [3] Siden $(A \times A) \setminus D$ har kardinalitet $n^2 - n$ følger påstanden.

Oppgave 5 (vekt 20 poeng)

a (vekt 10 poeng)

La p være et primtall. Anta at vi har naturlige tall q og r slik at $pq^2 = r^2$. Vis at da deler p både r og q . Bruk det til å vise, for eksempel ved motsigelse, at $q = 0$.

- [5] p er et primtall og $p|r^2$, dermed $p|r$. Vi skriver $pr' = r$. Vi får $pq^2 = p^2(r')^2$, dermed $q^2 = p(r')^2$. Samme argumentasjon gir da $p|q$.
- [5] Hvis $q \neq 0$ lar vi $\bar{q}$ være det minste elementet i $\mathbb{N}^*$ slik at det finnes $\bar{r} \in \mathbb{N}$ slik at $p\bar{q}^2 = \bar{r}^2$. Forrige argument viser da at $\bar{q}$ og $\bar{r}$ begge kan deles med p , hvilket gir en motsigelse med minimalitet av $\bar{q}$.
[alternativer: dele ut største felles faktor, bruke primtallsfaktoriseringen eller lage en strengt avtagende følge i $\mathbb{N}^*$.]

b (vekt 10 poeng)

– La p være et primtall. Anta nå at vi har naturlige tall m, q og r slik at $pmq^2 = r^2$ og m er innbyrdes primisk med p . Vis, som i første deloppgave, at $q = 0$.

– La n være et naturlig tall med $n > 0$. Anta at vi har naturlige tall q og r slik at $nq^2 = r^2$, og $q > 0$. Vi skriver primtallsfaktoriseringen til n som :

$$n = p_0^{k_0} p_1^{k_1} \cdots p_l^{k_l}, \quad (5.1)$$

med $l \geq 0$, primtall $p_0 < p_1 < \cdots < p_l$ og naturlige tall $k_i \geq 1$ for hver i . Vis, ved hjelp av forrige spørsmål, at hver k_i er et partall. Konkluder at det finnes et naturlig tall s slik at $n = s^2$.

(Fortsettes på side 4.)

- [5] Vi får først at p deler r som før. Så får vi at p deler mq^2 . Siden p er innbyrdes primisk med m får vi at p deler q^2 slik at p deler q . Samme argumentasjon gjelder derifra.
- [5] Anta at vi har en index i slik at k_i er et oddetall: $k_i = 2k'_i + 1$. Vi skriver $n = p_i^{2k'_i+1}n'$ og får:

$$p_i p_i^{2k'_i} n' q^2 = r^2. \quad (5.2)$$

Altså med $q' = p_i^{k'_i} q$ har vi at:

$$p_i n' (q')^2 = r^2, \quad (5.3)$$

og at n' er innbyrdes primisk med p_i . Dette gir $q' = 0$, som motstrider at $q > 0$.

Oppgave 6 (vekt 30 poeng)

La A være en ikke-tom mengde. Vi minner om at en relasjon på A kan tolkes som en delmengde av $A \times A$.

Vi lar $\mathcal{O}$ være mengden av ordensrelasjoner på A . En relasjon Q på A er altså et element i $\mathcal{O}$ hvis og bare hvis Q er refleksiv, transitiv og antisymmetrisk.

Vi lar $\mathcal{S}$ være mengden av relasjoner R på A som tilfredsstiller:

- R er transitiv.
- R er antirefleksiv, i den forstand at for alle x i A har vi at:

$$\neg(R(x, x)). \quad (6.1)$$

(Kommentar: Det vil være naturlig å tolke elementer i $\mathcal{S}$ som "strenge ordensrelasjoner", men vær oppmerksom på at en "streng ordensrelasjon" da ikke er en ordensrelasjon! For eksempel vil relasjonen på $\mathbb{N}$ som gitt x og y uttrykker at $x < y$, kunne omtales som en streng ordensrelasjon. Relasjonen som uttrykker at $x \leq y$ vil, på sin side, være en ordensrelasjon på $\mathbb{N}$.)

a (vekt 10 poeng)

La $Q \in \mathcal{O}$. Vi definerer da relasjonen $\hat{Q}$ på A ved at, for alle x og y i A :

$$\hat{Q}(x, y) \iff (Q(x, y) \wedge (x \neq y)). \quad (6.2)$$

Vis at $\hat{Q} \in \mathcal{S}$.

- [8] Transitivitet: Anta at $(Q(x, y) \wedge (x \neq y))$ og at $(Q(y, z) \wedge (y \neq z))$. Siden Q er transitiv får vi $Q(x, z)$. Anta for motsigelse $x = z$. Da får vi $Q(z, x)$ (refleksivitet), dermed $Q(z, y)$ (transitivitet). Dette gir $z = y$ (antisymmetri), men det er utelukket. Dermed $x \neq z$.
- [2] Antirefleksivitet: Vi kan ikke ha $(Q(x, x) \wedge (x \neq x))$.

(Fortsettes på side 5.)

b (vekt 10 poeng)

La $R \in \mathcal{S}$. Vi definerer da relasjonen $\tilde{R}$ på A ved at, for alle x og y i A :

$$\tilde{R}(x, y) \iff (R(x, y) \vee (x = y)). \quad (6.3)$$

Vis at $\tilde{R} \in \mathcal{O}$.

- [2] refleksivitet: Siden $x = x$.
- [5] transitivitet: Anta at $(R(x, y) \vee (x = y))$ og at $(R(y, z) \vee (y = z))$.
 - a) Hvis $x = y$ og $y = z$ får vi $x = z$.
 - b) Hvis $x = y$ og $y \neq z$ får vi $R(y, z)$, dermed $R(x, z)$.
 - c) Hvis $x \neq y$ og $y = z$ får vi $R(x, y)$, dermed $R(x, z)$.
 - d) Hvis $x \neq y$ og $y \neq z$ får vi $R(x, y)$ og $R(y, z)$, dermed $R(x, z)$.
- I alle tilfellene gjelder det at $(R(x, z) \vee (x = z))$.
- [3] antisymmetri: Anta at $(R(x, y) \vee (x = y))$ og $(R(y, x) \vee (y = x))$.
Hvis da $x \neq y$ får vi $R(x, y)$ og $R(y, x)$, som gir $R(x, x)$ som er umulig.
Dermed $x = y$.

c (vekt 10 poeng)

Vi betrakter følgende avbildninger:

- $\Phi : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{S}$, definert ved $\Phi(Q) = \hat{Q}$, for $Q \in \mathcal{O}$.
- $\Psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{O}$, definert ved $\Psi(R) = \tilde{R}$, for $R \in \mathcal{S}$.

Vis at Φ og Ψ er inverse av hverandre.

- [5] Vi sjekker at $\Psi \circ \Phi = \text{id}_{\mathcal{O}}$: La $Q \in \mathcal{O}$. Vi har :

$$\begin{aligned} \tilde{\hat{Q}}(x, y) &\iff (Q(x, y) \wedge (x \neq y)) \vee (x = y), & (6.4) \\ &\iff (Q(x, y) \vee (x = y)) \wedge ((x \neq y) \vee (x = y)), & (6.5) \\ &\iff Q(x, y), & (6.6) \end{aligned}$$
- siden den andre parentesen på andre linje alltid er sann, og vi har at $((x = y) \implies Q(x, y))$ ved refleksivitet.
- [5] Vi sjekker at $\Phi \circ \Psi = \text{id}_{\mathcal{S}}$: La $R \in \mathcal{S}$. Vi har:

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{R}}(x, y) &\iff (R(x, y) \vee (x = y)) \wedge (x \neq y), & (6.7) \\ &\iff (R(x, y) \wedge (x \neq y)) \vee ((x = y) \wedge (x \neq y)), & (6.8) \\ &\iff R(x, y), & (6.9) \end{aligned}$$
- siden den andre parentesen på andre linje alltid er usann, og siden vi har at $R(x, y) \implies (x \neq y)$ ved antirefleksivitet.

SLUTT