

MAT1140

Obligatorisk oppgave 1 av 2

Innleveringsfrist

Torsdag 09. OKTOBER 2025, klokken 14:30 i Canvas (canvas.uio.no).

Instruksjoner

Merk at man har **ett forsøk** på å få oppgaven godkjent. Dette betyr at det ikke lenger gis andregangsforsøk. På en annen side er terskelen for at en innlevert oppgave skal bli godkjent, lav (tilsvarende ett korrekt besvart spørsmål av de ti).

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av $\text{\LaTeX}$). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og oblignummer.

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser.

Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

LYKKE TIL!

Oppgave 1. La A, B være mengder og la $f : A \rightarrow B$ være en avbildning.

- (i) Anta at for alle $C \in \mathcal{P}(A)$ har vi $B \setminus f[C] \subseteq f[A \setminus C]$. Vis at f er surjektiv.
- (ii) Anta at f er surjektiv. Vis at for alle $C \in \mathcal{P}(A)$ har vi $B \setminus f[C] \subseteq f[A \setminus C]$.
- (iii) Anta at for alle $C \in \mathcal{P}(A)$ har vi $f[A \setminus C] \subseteq B \setminus f[C]$. Vis at f er injektiv.
- (iv) Anta at f er injektiv. Vis at for alle $C \in \mathcal{P}(A)$ har vi $f[A \setminus C] \subseteq B \setminus f[C]$.

Oppgave 2. La U og V være mengder og anta at vi har en avbildning $F : \mathcal{P}(V) \rightarrow \mathcal{P}(U)$. Vi antar videre at:

$$F(\emptyset) = \emptyset, \quad (1)$$

$$F(V) = U. \quad (2)$$

Vi antar også at for hver familie $(B_i)_{i \in I}$ av delmengder av V har vi:

$$F(\cap_{i \in I} B_i) = \cap_{i \in I} F(B_i), \quad (3)$$

$$F(\cup_{i \in I} B_i) = \cup_{i \in I} F(B_i). \quad (4)$$

(Målet med denne oppgaven er å vise at det finnes en avbildning $f : U \rightarrow V$ slik at for alle $B \in \mathcal{P}(V)$ har vi $F(B) = f^{-1}[B]$. Vi har vist i kurset at når det er tilfellet, vil alle egenskapene over være tilfredsstilt.)

For hver $y \in V$ definerer vi $A_y = F(\{y\})$.

- (i) Vis at når $y, y' \in V$ og $y \neq y'$ så er $A_y \cap A_{y'} = \emptyset$.
- (ii) Vis at for hver $x \in U$ finnes det $y \in V$ slik at $x \in A_y$.
- (iii) Gitt $x \in U$ velger vi $y \in V$ slik at $x \in A_y$ og definerer da $f(x) = y$. Hvorfor får vi en veldefinert og entydig bestemt avbildning $f : U \rightarrow V$?
- (iv) Vis at for alle $B \in \mathcal{P}(V)$ har vi $F(B) = f^{-1}[B]$.

Oppgave 3. La A være en mengde. Vi antar at vi har valgt et element $x \in A$ og en avbildning $f : A \rightarrow A$. Vi definerer da en følge u i A ved induksjon ved at $u_0 = x$ og for hver $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Vi ser på u som en avbildning $\mathbb{N} \rightarrow A$. Vi antar at u er surjektiv men ikke injektiv. Vi antar også at f er injektiv. Vi definerer, for $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}_n = \{p \in \mathbb{N} : p < n\}$.

- (i) Vis at det finnes $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ slik at $u_n = x$.
- (ii) Bruk velordningsprinsippet til å vise at man kan velge $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ slik at $u_n = x$ og i tillegg er den induserte avbildningen $u : \mathbb{N}_n \rightarrow A$ er bijektiv.