

MAT1140

Obligatorisk oppgave 1 av 2

Innleveringsfrist

Torsdag 09. OKTOBER 2025, klokken 14:30 i Canvas (canvas.uio.no).

Instruksjoner

Merk at man har **ett forsøk** på å få oppgaven godkjent. Dette betyr at det ikke lenger gis andregangsforsøk. På en annen side er terskelen for at en innlevert oppgave skal bli godkjent, lav (tilsvarende ett korrekt besvart spørsmål av de ti).

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av $\text{\LaTeX}$). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og oblignummer.

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser.

Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

LYKKE TIL!

Oppgave 1. La A, B være mengder og la $f : A \rightarrow B$ være en avbildning.

Hint: Det kan være til hjelp å visualisere situasjonene med Venn diagrammer.

(i) Anta at for alle $C \in \mathcal{P}(A)$ har vi $B \setminus f[C] \subseteq f[A \setminus C]$. Vis at f er surjektiv.

Hint: Prøv et lurt valg av C .

Vi bruker $C = \emptyset$. Vi får $B \subseteq f[A]$. Dette uttrykker at f er surjektiv.

(ii) Anta at f er surjektiv. Vis at for alle $C \in \mathcal{P}(A)$ har vi $B \setminus f[C] \subseteq f[A \setminus C]$.

Hint: Direktebevis av implikasjonen.

La C være gitt. Anta at $y \in B \setminus f[C]$. Velg $x \in A$ slik at $f(x) = y$. Vi har $x \notin C$.

(iii) Anta at for alle $C \in \mathcal{P}(A)$ har vi $f[A \setminus C] \subseteq B \setminus f[C]$. Vis at f er injektiv.

Hint: Man kan prøve med C som er en ettpunktmengde.

La $x, x' \in A$ og anta $x \neq x'$. Vi har $x \in A \setminus \{x'\}$. Dermed $f(x) \in B \setminus f[\{x'\}] = B \setminus \{f(x')\}$. Dermed $f(x) \neq f(x')$.

(iv) Anta at f er injektiv. Vis at for alle $C \in \mathcal{P}(A)$ har vi $f[A \setminus C] \subseteq B \setminus f[C]$.

Hint: Elementer i C og $A \setminus C$ kan ikke gi samme verdi gjennom f .

La C være gitt. Anta at $y \in f[A \setminus C]$. Velg $x \in A \setminus C$ slik at $f(x) = y$. Vi sjekker at $y \notin f[C]$. Hvis ikke vil vi ha $y \in f[C]$. Da kan vi velge $x' \in C$ slik at $f(x') = y$. Da har vi $x \neq x'$ men $f(x) = f(x')$.

Oppgave 2. La U og V være mengder og anta at vi har en avbildning $F : \mathcal{P}(V) \rightarrow \mathcal{P}(U)$. Vi antar videre at:

$$F(\emptyset) = \emptyset, \tag{1}$$

$$F(V) = U. \tag{2}$$

Vi antar også at for hver familie $(B_i)_{i \in I}$ av delmengder av V har vi:

$$F(\cap_{i \in I} B_i) = \cap_{i \in I} F(B_i), \tag{3}$$

$$F(\cup_{i \in I} B_i) = \cup_{i \in I} F(B_i). \tag{4}$$

(Målet med denne oppgaven er å vise at det finnes en avbildning $f : U \rightarrow V$ slik at for alle $B \in \mathcal{P}(V)$ har vi $F(B) = f^{-1}[B]$. Vi har vist i kurset at når det er tilfellet, vil alle egenskapene over være tilfredsstilt.)

For hver $y \in V$ definerer vi $A_y = F(\{y\})$.

- (i) Vis at når $y, y' \in V$ og $y \neq y'$ så er $A_y \cap A_{y'} = \emptyset$.

Hint: Bruk at $\{y\} \cap \{y'\} = \emptyset$.

Vi har $A_y \cap A_{y'} = F(\{y\} \cap \{y'\}) = F(\emptyset) = \emptyset$.

- (ii) Vis at for hver $x \in U$ finnes det $y \in V$ slik at $x \in A_y$.

Hint: Hva er unionen av alle mengdene A_y med $y \in V$?

Vi har:

$$\cup_{y \in V} A_y = F(\cup_{y \in V} \{y\}) = F(V) = U. \quad (5)$$

- (iii) Gitt $x \in U$ velger vi $y \in V$ slik at $x \in A_y$ og definerer da $f(x) = y$. Hvorfor får vi en veldefinert og entydig bestemt avbildning $f : U \rightarrow V$?

Hint: Relater dette til de foregående spørsmålene.

Vi har nettopp vist at gitt $x \in U$ finnes det en og bare en $y \in V$ slik at $x \in A_y$.

- (iv) Vis at for alle $B \in \mathcal{P}(V)$ har vi $F(B) = f^{-1}[B]$.

Hint: Skriv B som en union av ettpunktsmengder.

Vi har:

$$f^{-1}[B] = \{x \in U : f(x) \in B\}, \quad (6)$$

$$= \{x \in U : \exists y \in B \quad x \in A_y\}, \quad (7)$$

$$= \cup_{y \in B} A_y, \quad (8)$$

$$= F(\cup_{y \in B} \{y\}), \quad (9)$$

$$= F(B). \quad (10)$$

Oppgave 3. La A være en mengde. Vi antar at vi har valgt et element $x \in A$ og en avbildning $f : A \rightarrow A$. Vi definerer da en følge u i A ved induksjon ved at $u_0 = x$ og for hver $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Vi ser på u som

en avbildning $\mathbb{N} \rightarrow A$. Vi antar at u er surjektiv men ikke injektiv. Vi antar også at f er injektiv. Vi definerer, for $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}_n = \{p \in \mathbb{N} : p < n\}$.

(i) Vis at det finnes $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ slik at $u_n = x$.

Hint: Bruk ikke-injektiviteten av u til først å finne $m, n \in \mathbb{N}$ med $n \neq 0$ slik at $u_{m+n} = u_m$.

Bruk ikke-injektiviteten av u til å finne $m, p \in \mathbb{N}$ slik at $u_p = u_m$ og $p \neq m$. Vi antar $p > m$ og skriver da $p = m + n$ med $n \neq 0$. Vi sjekker nå at $u_n = x$. Hvis ikke har vi $u_n \neq x$. Ved induksjon får vi da, for alle q , at $u_{q+p} = u_q$ og det motstrider tilfellet $q = m$.

(ii) Bruk velordningsprinsippet til å vise at man kan velge $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ slik at $u_n = x$ og i tillegg er den induserte avbildningen $u : \mathbb{N}_n \rightarrow A$ bijektiv.

Hint: Betrakt mengden av $n \neq 0$ slik at $u_n = x$.

Mengden av $n \neq 0$ slik at $u_n = x$ er ikke tom. Den har et minste element som vi tillater oss å kalle n .

Den induserte avbildningen er injektiv, ellers kunne vi finne en enda mindre n med teknikken over.

La V være verdimengden $V = u[\mathbb{N}_n]$. Vi viser ved induksjon at for alle $p \in \mathbb{N}$ så er $u_p \in V$. Vi har $u_0 \in V$ siden $n \neq 0$. Hvis $u_p \in V$ har vi en $q < n$ slik at $u_p = u_q$. Hvis $q + 1 < n$ har vi $u_{p+1} = f(u_p) = f(u_q) = u_{q+1} \in V$. Hvis ikke får vi $q + 1 = n$. Da har vi $u_{p+1} = u_{q+1} = x = u_0 \in V$.

Vi har vist at $\forall p \in \mathbb{N} \quad u_p \in V$. Siden $u : \mathbb{N} \rightarrow A$ er surjektiv følger det at $u : \mathbb{N}_n \rightarrow A$ er surjektiv.